

1. Movimientos acelerados.
2. Movimiento uniformemente acelerado (MUA rectilíneo y parabólico)
3. Resolución de problemas con movimientos en una o dos dimensiones.
4. Movimientos circulares (MCU y MCUA).

1. Introducción: Movimientos acelerados.

Revisión del concepto de aceleración:

En la unidad anterior estudiamos que la aceleración indica cómo cambia la velocidad con el tiempo.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{Unidades: En el S.I.} \quad [a_m] = m/s^2 = m \cdot s^{-2} \quad (\text{metros por segundo en cada segundo})$$

Recordemos que un movimiento será acelerado cuando cambie su velocidad. Y esto ocurre no sólo si se mueve más rápido o más lento, sino también si cambia de dirección, si su trayectoria no es recta.

Aceleraciones tangencial (\vec{a}_t) y normal (\vec{a}_n)

Cuando en un movimiento cambia la velocidad, puede ser que cambie su rapidez, su dirección, o ambas cosas. Podemos estudiar estos cambios por separado, descomponiendo la aceleración como la suma de dos componentes distintas de las cartesianas, denominadas componentes intrínsecas :

- Aceleración tangencial (\vec{a}_t):

- Lleva la misma dirección del vector velocidad (puede ir en el mismo sentido o en el opuesto). NO modifica la dirección del movimiento.
- Modifica la rapidez (el módulo de la velocidad). Hace que el movimiento sea más rápido o más lento.

Si el sentido de \vec{a}_t coincide con el de \vec{v} → aumenta la rapidez

Si el sentido de \vec{a}_t es el opuesto al de \vec{v} → disminuye la rapidez

En módulo, se calcula con $a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$

Por ejemplo, al pisar el acelerador o el freno de un coche originamos una aceleración tangencial. Varía la rapidez, pero no cambia la dirección.

- Aceleración normal (o centrípeta) (\vec{a}_n):

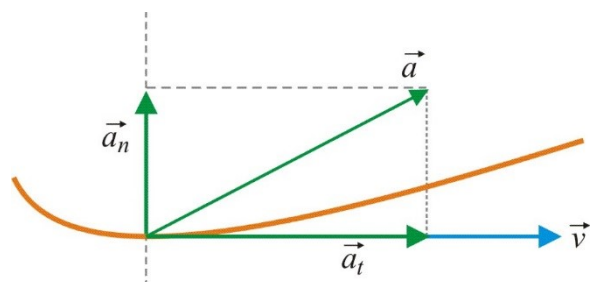
- Lleva dirección perpendicular (=normal) a la velocidad. Modifica la dirección del movimiento, indicando hacia dónde se desvía. Apunta hacia el centro de la curva.
- NO modifica la rapidez (el módulo de la velocidad).

En módulo, se calcula con $a_n = \frac{v^2}{R}$ donde R es el radio de la curva que describe en ese momento

Por ejemplo, al girar el volante del coche originamos una aceleración normal, que hace variar la dirección del movimiento.

La suma de ambas componentes es, lógicamente, el vector aceleración:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad \rightarrow \quad \text{en módulo} \quad a^2 = a_t^2 + a_n^2$$



2. Movimiento Uniformemente Acelerado (MUA):

Este tipo de movimiento se caracteriza porque posee aceleración constante en módulo, dirección y sentido. ($\vec{a} = cte$)
La velocidad (vector) varía a ritmo constante.

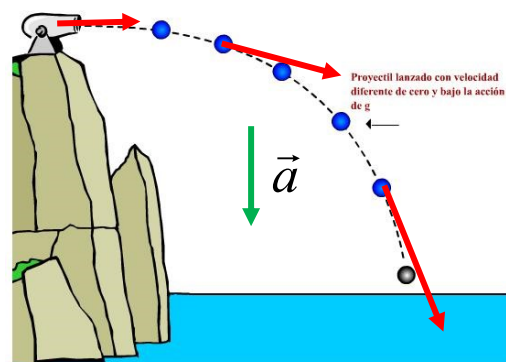
La **rapidez** del movimiento ($|\vec{v}|$) varía, aumentando o disminuyendo.

La **trayectoria** que sigue depende de las direcciones de \vec{v}_0 y \vec{a} :

Si $\vec{v}_0 = 0 \rightarrow$ Trayectoria rectilínea

Si \vec{v}_0 y \vec{a} van en la misma dirección \rightarrow Trayectoria rectilínea

Si \vec{v}_0 y \vec{a} van en direcciones distintas \rightarrow Trayectoria curvilínea (parabólica)



Ecuaciones del M.U.A:

Ecuación de la velocidad: Sabiendo que $\vec{a} = cte$:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0) \quad \text{Si } t_0 = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

Ecuación de la posición:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (t - t_0)^2 \quad \text{Si } t_0 = 0 \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$$

Puede comprobarse que, lógicamente, al derivar la ecuación del movimiento obtenemos la de la velocidad.

Casos especiales dentro del M.U.A:

Si bien todos los movimientos que tengan aceleración constante obedecen a las ecuaciones expresadas anteriormente, y resolveremos los problemas del mismo modo, podemos establecer algunos casos particulares de MUA que tienen especial interés.

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A): En este movimiento la trayectoria es rectilínea, ya que la velocidad y la aceleración son paralelas. Es el caso, por ejemplo, de un automóvil que se desplaza en línea recta y pisa el acelerador, o el freno. Para estos movimientos es bueno escoger un sistema de referencia de forma que uno de los ejes (x o y) coincida con la dirección de la trayectoria. Así, todos los vectores tendrá el mismo vector unitario (\vec{i} o \vec{j}), facilitando la resolución del problema.

Movimientos de caída libre: Estos movimientos están sometidos únicamente a la aceleración de la gravedad ($\vec{a} = \vec{g}$). Aunque el valor de la gravedad varía con la altura, siempre que no nos alejemos mucho de la superficie del planeta (es decir, hasta una altura de algunos km), podemos considerar que su valor se mantiene constante. Al nivel de la superficie terrestre el valor del módulo de la aceleración gravitatoria es de $9,8 \text{ m s}^{-2}$

(Nota: El valor de la gravedad en la superficie de un planeta depende de la masa y del radio de dicho planeta)

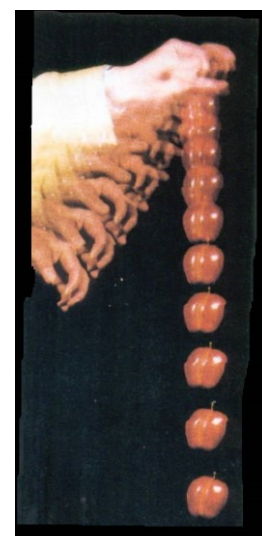
En los problemas de caída libre, siempre consideraremos que el rozamiento con el aire es despreciable, y no lo tendremos en cuenta.

La trayectoria que sigue un cuerpo en caída libre depende de la dirección de su velocidad inicial, caso de que tenga. Esto ya lo hemos estudiado anteriormente, para un MUA en general:

Si $\vec{v}_0 = 0 \rightarrow$ Trayectoria rectilínea

Si \vec{v}_0 y \vec{g} van en la misma dirección (son paralelos) \rightarrow Trayectoria rectilínea

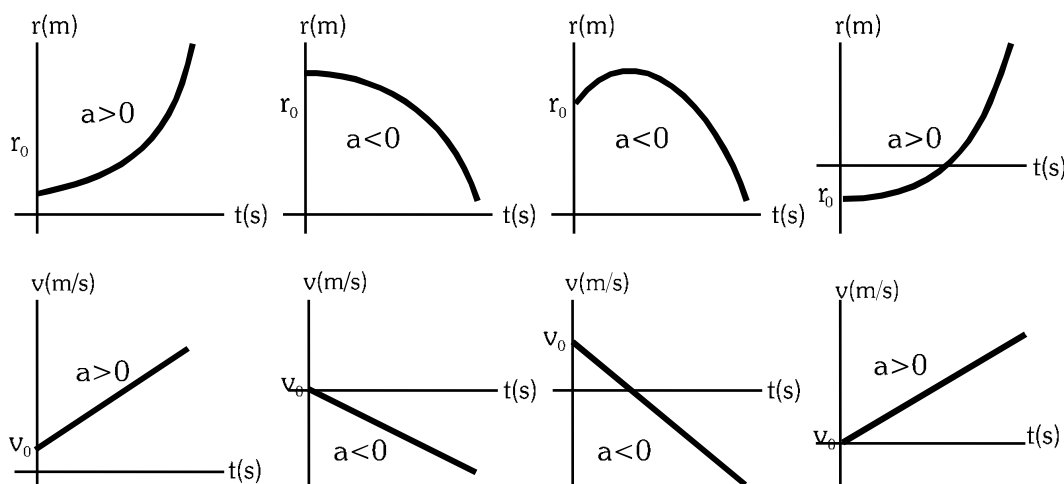
Si \vec{v}_0 y \vec{g} van en direcciones distintas \rightarrow Trayectoria curvilínea (parabólica)



Fotografía estroboscópica obtenida a 60 imágenes por segundo.
(Paul A. Tipler: Física para la Ciencia y la Tecnología. Ed. Reverté, 1999)

Gráficas del movimiento uniformemente acelerado:

Observando las ecuaciones de movimiento y velocidad, vemos que la gráfica r/t corresponde a una parábola, y la gráfica v/t es una línea recta. Ambas gráficas están relacionadas. Analizamos algunos ejemplos:



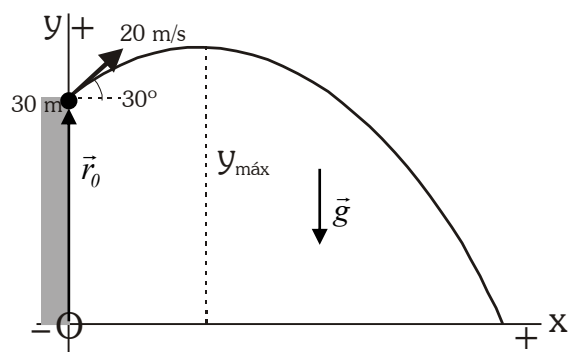
3. Resolución de problemas sobre movimiento en una o dos dimensiones:

Pasos a seguir.

- 1º- Esquema del problema, indicando claramente el sistema de referencia y criterio de signos. (Esto es fundamental, ya que todos los datos y magnitudes del problema los calcularemos según ese sistema de referencia. No se puede cambiar durante el problema).
- 2º- Datos del problema (tipo de movimiento, posición inicial, velocidad, inicial, aceleración). Todas esas son magnitudes vectoriales, deben llevar vectores unitarios según el sistema de referencia escogido, además de sus unidades. Es posible que haya que descomponer algún vector en componentes x e y (suele ocurrir con la velocidad inicial).
- 3º- Ecuación del movimiento y ecuación de velocidad: sustituir los datos y descomponer (ecuaciones paramétricas).
- 4º- A partir de estas ecuaciones, calculamos lo que nos pide el problema (en muchas ocasiones, un dato servirá para calcular el valor del tiempo en una de las ecuaciones, y sustituirlo luego en otra ecuación).

Ejemplo: Resolución de movimientos de caída libre (parabólico):

Desde un acantilado de 30 m de altura sobre el nivel del mar, se lanza una piedra hacia el mar, con una velocidad de 20 m/s y formando un ángulo de 30° con la horizontal. Calcular la altura máxima que alcanza y a qué distancia del acantilado caerá la piedra.

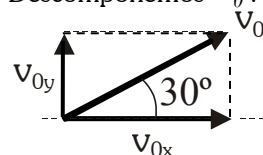


[Colocamos el sistema de referencia en la base del acantilado (de esta forma las coordenadas x e y de la piedra serán siempre positivas)]

Datos iniciales: $\vec{r}_0 = 30 \vec{j} \text{ m}$;

$$\vec{a} = \vec{g} = -9,8 \vec{j} \text{ m s}^{-2} = \text{cte} , \quad t_0 = 0$$

Descomponemos \vec{v}_0 :



$$v_{0x} = 20 \cdot \cos 30^\circ = 17,32 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = 20 \cdot \sin 30^\circ = 10 \text{ m/s}$$

[ambas componentes son positivas]

$$\vec{v}_0 = 17,32 \vec{i} + 10 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$$

Se trata de un movimiento uniformemente acelerado, ya que la aceleración es constante.

Sigue una trayectoria parabólica, pues \vec{v}_0 y \vec{a} no van en la misma dirección.

Ecuaciones:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2 \rightarrow \vec{r} = 30\vec{j} + 17,32 \cdot t \vec{i} + 10 \cdot t \vec{j} - 4,9 \cdot t^2 \vec{j} \text{ (m)} \rightarrow \begin{cases} x = 17,32 \cdot t \text{ (m)} \\ y = 30 + 10 \cdot t - 4,9 t^2 \text{ (m)} \end{cases}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \rightarrow \vec{v} = 17,32 \vec{i} + 10 \vec{j} - 9,8 \cdot t \vec{j} \rightarrow \begin{cases} v_x = 17,32 \text{ m/s} = \text{cte} \\ v_y = 10 - 9,8 \cdot t \text{ m/s} \end{cases}$$

[Es decir, la piedra lleva un movimiento uniforme en el eje x (siempre avanza al mismo ritmo en horizontal) y un movimiento acelerado en el eje y, ya que la aceleración va sólo en vertical.]

Cálculo de la altura máxima:

[En el punto de altura máxima, se cumple que la componente vertical de la velocidad se anula] $v_y = 0$

$$v_y = 10 - 9,8 \cdot t = 0 \rightarrow t = 1,02 \text{ s. [tarda 1,02 s en alcanzar su altura (y) máxima. Sustituimos en la ecuación de y]}$$

$$y = 30 + 10 \cdot t - 4,9 t^2 = \underline{35,1 \text{ m.}} = y_{\text{máx}} \text{ [En ese momento está a 35,1 m de altura sobre el mar.]}$$

Cálculo del punto de impacto con el mar (alcance horizontal):

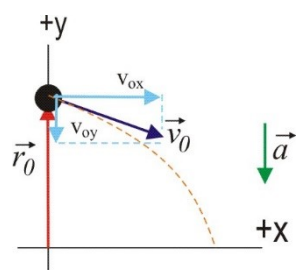
Cuando llega a la superficie del mar, se cumple que su altura es cero ($y = 0$).

$$y = 30 + 10 \cdot t - 4,9 t^2 = 0 \rightarrow t = 3,7 \text{ s [se desprecia la otra solución } t = -1,66 \text{ s, que carece de sentido]}$$

Sustituimos en x $x = 17,32 \cdot t = \underline{64,08 \text{ m.}}$ Cae a esa distancia horizontal desde la base del acantilado.

Una pelota rueda por un tejado que forma 30° con la horizontal, de forma que cuando cae por el alero lo hace con una velocidad de 5 m/s. La altura del alero desde el suelo es de 20 m. Calcular:

- Tiempo que tarda en llegar al suelo.
- Velocidad (vector y módulo) en ese momento.
- A qué distancia horizontal de la pared choca con el suelo.



La pelota describe un movimiento uniformemente acelerado, ya que su aceleración es la gravitatoria, que es constante. La trayectoria es parabólica (velocidad y aceleración no son paralelas)

Datos: $\vec{r}_0 = 20 \vec{j} \text{ m}$ $\vec{a} = -9,8 \vec{j} \text{ ms}^{-2}$

$$\vec{v}_0 = 5 \cdot \cos 30^\circ \vec{i} - 5 \cdot \sin 30^\circ \vec{j} \text{ ms}^{-1} = 4,33 \vec{i} - 2,5 \vec{j} \text{ ms}^{-1}$$

Ecuaciones de movimiento

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2 \rightarrow \vec{r} = 20 \vec{j} + (4,33 t \vec{i} - 2,5 t \vec{j}) - 4,9 t^2 \vec{j} \text{ (m)} \quad \begin{cases} x = 4,33 \cdot t \text{ (m)} \\ y = 20 - 2,5 \cdot t - 4,9 \cdot t^2 \text{ (m)} \end{cases}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \rightarrow \vec{v} = 4,33 \vec{i} - 2,5 \vec{j} - 9,8 t \vec{j} \text{ (ms}^{-1}\text{)} \quad \begin{cases} v_x = 4,33 \text{ (ms}^{-1}\text{)} \\ v_y = -2,5 - 9,8 \cdot t \text{ (ms}^{-1}\text{)} \end{cases}$$

a) Cuando llega al suelo $y = 0 \text{ m} \rightarrow 0 = 20 - 2,5 \cdot t - 4,9 \cdot t^2 \rightarrow t = 1,78 \text{ s}$

b) Sustituimos en las ecuaciones de la velocidad: $\begin{cases} v_x = 4,33 \text{ ms}^{-1} \\ v_y = -2,5 - 9,8 \cdot 1,78 = -19,94 \text{ ms}^{-1} \end{cases}$

El vector: $\vec{v} = 4,33 \vec{i} - 19,94 \vec{j} \text{ ms}^{-1}$

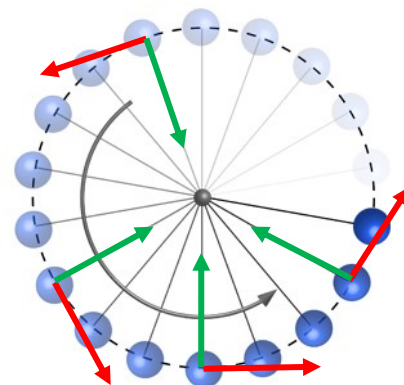
En módulo $v = \sqrt{(4,33)^2 + (-19,94)^2} = 20,40 \text{ ms}^{-1}$

c) Sustituimos en x el tiempo en llegar al suelo ($t = 1,78 \text{ s}$) $\rightarrow x = 4,33 \cdot t = 7,70 \text{ m.}$

4. Movimientos circulares:

4.1 Movimiento Circular Uniforme (M.C.U):

El movimiento circular uniforme (MCU) es un movimiento acelerado (la dirección de la velocidad cambia), dotado únicamente de aceleración centrípeta (aceleración normal). La trayectoria que describe es una curva de radio constante: una circunferencia.



Un movimiento circular es más sencillo de estudiar si usamos coordenadas polares (en lugar de coordenadas x e y, usamos el radio y el ángulo que forma con uno de los ejes, normalmente el semieje x +). Como el radio de la circunferencia que describe se mantiene constante (R), para indicar la posición del móvil en la circunferencia sólo tendremos que dar el valor del ángulo θ , que se denomina **posición angular** y se mide en radianes (rad)

$$(2\pi \text{ rad} \rightarrow 360^\circ)$$

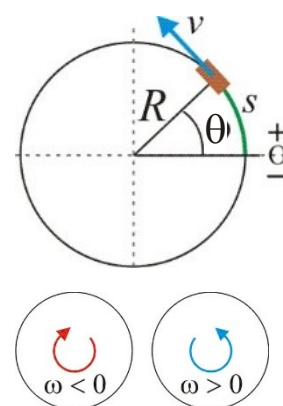
El desplazamiento angular entre dos posiciones se calcula como la diferencia entre las mismas

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0$$

La rapidez con que varía el ángulo θ descrito proporciona una medida de la velocidad del movimiento circular. A esa velocidad relacionada con el ángulo se la denominará “**velocidad angular**”, que se simboliza como ω y que, en términos de velocidad angular media, se expresa como:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}$$

Unidades (S.I) = radián por segundo ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$)



Ecuación del movimiento circular uniforme :

Sabemos que en un MCU, la velocidad angular es constante. Despejando:

$$\theta - \theta_0 = \omega \cdot (t - t_0) \rightarrow \theta = \theta_0 + \omega \cdot (t - t_0) \quad \text{En el caso de que } t_0 = 0. \quad \rightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega \cdot t$$

Magnitudes asociadas al M.C.U:

Al tratarse de un movimiento periódico, que se repite cada cierto tiempo, podemos definir:

- **Período (T)**: Tiempo que tarda el cuerpo en dar una vuelta completa (o repetir su posición). En el S.I. se mide en segundos. $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$

- **Frecuencia (f)**: Es la magnitud inversa del periodo. Indica el número de vueltas (o número de veces que se repite una posición) por unidad de tiempo.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{|\omega|}{2\pi}$$

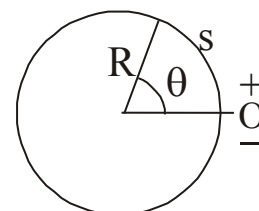
Unidad en el S.I: $1/s = \text{s}^{-1}$ (también se denomina hertzio (Hz)).

Relación entre magnitudes angulares y lineales:

Posición y desplazamiento sobre la trayectoria: $s = \theta \cdot R$; $\Delta s = \Delta\theta \cdot R$

Velocidad lineal (rapidez, v)

$$v = \omega \cdot R$$



En estas expresiones, los signos de s y v están relacionados con el criterio de signos con el que medimos los ángulos.

Las unidades de R en estas expresiones son rad/m. el ángulo tiene que estar medido obligatoriamente en radianes.

4.2 Movimiento Circular Uniformemente Acelerado (MCUA).

Cuando la velocidad angular de un cuerpo que se mueve describiendo círculos varía, se dice que está dotado de **aceleración angular**, que se simboliza con la letra α . Indica cómo varía la velocidad angular con el tiempo.

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}$$

La unidad de la aceleración angular en el sistema internacional es el **radián por segundo al cuadrado (rad/s²)**. Si α es constante, se dice que el **movimiento circular es uniformemente acelerado (MCUA)**

Ecuaciones del MCUA:

$$\begin{array}{l} \text{Posición: } \theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha \cdot (t - t_0)^2 \\ \text{Velocidad: } \omega = \omega_0 + \alpha \cdot (t - t_0) \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Si } t_0 = 0} \quad \begin{array}{l} \theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \end{array}$$

Relación entre magnitudes angulares y lineales:

Aceleración tangencial: $\mathbf{a}_t = \alpha \cdot R$ el signo de a_t se corresponde con el criterio asociado a los ángulos.
 Aceleración normal: $\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$

Ejercicios:

Sobre ecuaciones del movimiento:

1.- En un movimiento se sabe que: $\vec{a}_n = 0$, $\vec{a}_t = 2 \vec{i}$ (m/s²), y en el instante inicial se cumple que

$$\vec{v}_0 = 2 \vec{i} \text{ m/s y } \vec{r}_0 = \vec{i} + \vec{j} \text{ m}$$

Razona de qué tipo de movimiento se trata y calcula \vec{v} y \vec{r} para cualquier instante.

$$(\vec{r} = (1 + 2t + t^2) \vec{i} + \vec{j} \text{ m ; } \vec{v} = (2 + 2t) \vec{i} \text{ m/s})$$

2. De un movimiento sabemos que se encuentra sometido únicamente a la acción de la gravedad, y que inicialmente se encontraba en el origen, moviéndose con una velocidad $\vec{v}_0 = 3 \vec{i} - \vec{j}$ m/s. Razona de qué tipo de movimiento se trata y calcula \vec{r} y \vec{v} para cualquier instante.

$$(\vec{r} = 3t\vec{i} + (-t - 5t^2)\vec{j} \text{ m ; } \vec{v} = 3\vec{i} + (-1 - 10t)\vec{j} \text{ m/s})$$

Movimientos en una dimensión:

3. Una ciclista se mueve en línea recta, y acelera pasando de 15 km/h a 45 km/h en 10 s. Calcular, en unidades del S.I.:

- Aceleración de la ciclista, supuesta constante. ($\vec{a} = 0,83 \vec{i} \text{ m s}^{-2}$)
- Distancia recorrida en ese tiempo. ($\Delta r = 83,2 \text{ m}$)
- Si pasados esos 10 s, la ciclista frena hasta detenerse en 5 s, calcular la aceleración de frenado y la distancia recorrida desde que comenzó a frenar hasta que se para. ($\vec{a} = -2,5 \vec{i} \text{ m s}^{-2}$, $\Delta r = 31,25 \text{ m}$)

4. Un coche que lleva una velocidad de 144 km/h, frena; y después de recorrer 160m se para. Calcular:

- La aceleración, supuesta constante. ($\vec{a} = -5 \vec{i} \text{ m s}^{-2}$)
- Tiempo invertido por el móvil en el frenado. (8 s)

5. Un automóvil circula a 72 km/h. En ese momento, el conductor ve un obstáculo en la carretera y pisa el freno hasta que el coche se detiene. Suponiendo que el tiempo de reacción del automovilista es de 0,5 s, y que la aceleración de frenado es (en módulo) de 5 m/s^2 , calcular:

- Distancia recorrida durante el tiempo de reacción (durante ese tiempo aún no ha pisado el freno). (10 m)
- Tiempo total que tarda el coche en detenerse. (4,5 s)
- Distancia total que recorre el coche hasta que se para. (50 m)
- Velocidad y posición del automóvil al cabo de 2 s desde que empezamos a estudiar este movimiento.

$$(\vec{v} = 12,5 \vec{i} \text{ m s}^{-1} ; \vec{r} = 34,38 \vec{i} \text{ m})$$

6. Dejamos caer en caída libre un cuerpo desde una torre de 30 m. Despreciando el rozamiento con el aire, calcular:

- Tiempo que tarda en llegar al suelo y velocidad con la que llega. ($t = 2,47 \text{ s}$; $\vec{v} = -24,25 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$)
- Posición y velocidad al cabo de 1,5 s de iniciado el movimiento. ($\vec{r} = 18,98 \vec{j} \text{ m}$; $\vec{v} = -14,7 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$)
- Velocidad que lleva cuando su altura es de 15 m. ($\vec{v} = -17,15 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$)

7. Repite el problema anterior si inicialmente impulsamos hacia abajo la piedra con una velocidad de 10 m/s.

$$a) t = 1,66 \text{ s}; \vec{v} = -26,23 \vec{j} \text{ m s}^{-1}; \quad b) \vec{r} = 3,975 \vec{j} \text{ m}; \vec{v} = -24,7 \vec{j} \text{ m s}^{-1}; \quad c) \vec{v} = -19,85 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$$

8. Lanzamos una piedra desde el suelo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 12 m s^{-1} . Despreciamos el rozamiento con el aire. Calcular:

- Altura máxima que alcanza y tiempo que tarda en alcanzarla. (7,35 m; 1,225 s.)
- Velocidad y posición de la piedra al cabo de 1 s de empezar el movimiento. ($\vec{v} = 2,2 \vec{j} \text{ m/s}$; $\vec{r} = 7,1 \vec{j} \text{ m}$)
- Tiempo que tarda en llegar de nuevo al suelo y velocidad que lleva en el momento de chocar con él.

$$(t = 2,45 \text{ s.}; \vec{v} = -12 \vec{j} \text{ m/s})$$

9. Lanzamos desde el suelo una piedra verticalmente hacia arriba, alcanzando una altura de 20 m. ¿Con qué velocidad se lanzó? ¿Qué tiempo tarda en alcanzar su altura máxima? ($t = 2,02 \text{ s}$; $\vec{v}_0 = 19,8 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$)

10. Una grúa eleva a un albañil con una velocidad vertical de 2 m/s. Cuando se halla a 10 m sobre el suelo, se le cae el bocadillo. Calcule el tiempo que tarda el bocadillo en llegar al suelo y con qué velocidad lo hará.

$$(t = 1,65 \text{ s.}; \vec{v} = -14,14 \vec{j} \text{ m/s})$$

11. Desde un globo aerostático que asciende con una velocidad de 5 m/s se suelta uno de los sacos de lastre. Si desde que se suelta hasta que llega al suelo transcurren 10 s, calcula la altura a la que se encontraba el globo en el momento de la caída. (440 m)

12. Un objeto se desplaza sobre el eje x con un movimiento que viene dado por $x = 4t - t^2$ (S.I.). Calcular:

- ¿En qué instante se invierte el sentido del movimiento? (A los 2 s.)
- ¿Cuál es la posición del móvil en ese instante? (4 i m)

13. Un arquero que está al pie de una torre de 40 m, dispara una flecha verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 25 m s^{-1} . En el instante del disparo dejan caer desde la torre una piedra en caída libre:

- Escribir las ecuaciones de ambos movimientos. ($\vec{r}_1 = (25t - 4,9t^2) \vec{j} \text{ m}$, $\vec{r}_2 = (40 - 4,9t^2) \vec{j} \text{ m}$)
- Calcular la altura a la que se cruzan la piedra y la flecha. (27,46 m)
- Calcular la velocidad que lleva cada una en el momento del cruce. ($\vec{v}_1 = 9,32 \vec{j} \text{ m/s}$, $\vec{v}_2 = -15,7 \vec{j} \text{ m/s}$)
- Calcular el tiempo que tarda la flecha en volver de nuevo al suelo. (5,1 s.)

Movimientos en dos dimensiones:

14. Una pelota rueda por un tejado que forma 30° con la horizontal, de forma que cuando cae por el alero lo hace con una velocidad de 5 m/s. La altura del alero desde el suelo es de 20 m. Calcular:

- Tiempo que tarda en caer al suelo. ($t = 1,78 \text{ s}$.)
- Velocidad con la que llega la pelota al suelo. ($\vec{v} = 4,33 \vec{i} - 10,04 \vec{j} \text{ m/s}$)

- c) Repetir el problema suponiendo la misma velocidad de salida, pero un tejado horizontal.

$$(t = 2,02 \text{ s}; \vec{v} = 5 \vec{i} - 19,8 \vec{j} \text{ m/s})$$

- 15.** Un portero de fútbol saca de portería de modo que la velocidad inicial del balón forma 30° con la horizontal y su módulo es de 20 m/s. Despreciando el rozamiento con el aire, calcule:

- a) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento tocará el balón el césped? $(x = 35,35 \text{ m})$
 b) Altura máxima que alcanza el balón y tiempo que tarda en alcanzar esa altura máxima. $(5,1 \text{ m}, 1,02 \text{ s})$
 c) Repetir los dos apartados anteriores suponiendo que el balón sale con un ángulo de 45° con el suelo.
 $(40,82 \text{ m}, 10,2 \text{ m}, 1,44 \text{ s})$

- 16.** Un mortero dispara proyectiles con un ángulo de 60° con la horizontal.

- a) ¿Con qué velocidad debe lanzar el proyectil para hacer impacto en una trinchera situada a 200 m?
 b) Si a los 190 m del punto de disparo existe una casa de 20 m de altura, ¿conseguirá proteger ese obstáculo la trinchera?

- 17.** Desde la terraza de un edificio de 50 m de altura se lanza horizontalmente una piedra con una velocidad de 5 m/s. Calcula:

- a) ¿Qué anchura deberá tener la calle para que esa piedra no choque contra el edificio situado enfrente? $(> 15,97 \text{ m})$
 b) ¿Cuánto tiempo tardará en caer la piedra? $(3,19 \text{ s})$

- 18.** Un avión vuela horizontalmente con una velocidad de 360 km/h a una altura de 500 m. Al pasar por la vertical de un punto A suelta una bomba. Calcula:

- a) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar la bomba al suelo? $(10,1 \text{ s})$
 b) ¿A qué distancia del punto A se producirá la explosión? (1010 m)
 c) ¿Con qué velocidad llegará la bomba al suelo? $(\vec{v} = 100 \vec{i} - 98,99 \vec{j} \text{ m s}^{-1})$

- 19.** Un centrocampista lanza hacia el delantero (que se encuentra 30 m por delante) un balón en profundidad formando un ángulo de 37° con la horizontal y a una velocidad inicial de 24 m/s. El delantero arranca a correr con movimiento uniforme en el mismo instante del lanzamiento. ¿Qué velocidad debe llevar para alcanzar al balón en el momento en que éste toque el suelo?

- 20.** Una barca a motor tiene que atravesar un río que fluye a 3 m/s en la dirección que indica el dibujo. El motor de la barca imprime una aceleración de $0,25 \text{ m/s}^2$ en dirección perpendicular a la orilla. Calcule razonadamente.

- a) A qué punto de la otra orilla llegará la barca, teniendo en cuenta que el ancho del río es de 200 m. $(120 \text{ m por encima del punto B})$
 b) Velocidad con la que llega a la otra orilla (vector y módulo) $\vec{v} = 3 \vec{i} + 10 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$; $v = 10,44 \text{ m s}^{-1}$
 c) Dibuja aproximadamente la trayectoria seguida por la barca

- 21.** Un globo se encuentra inicialmente a 50 m de altura, y sufre una aceleración ascensional de $0,2 \text{ m s}^{-2}$. El viento hace que el globo tenga desde el principio una componente horizontal de velocidad constante e igual a 5 m s^{-1} .

- a) ¿Qué tipo de movimiento es? b) Calcula la ecuación de movimiento;
 c) Altura cuando ha avanzado horizontalmente 100 m. (90 m de altura)

- 22.** Un jugador de baloncesto desea conseguir una canasta de 3 puntos. La canasta está situada a 3,05 m de altura y la línea de tres puntos a 6,25 m de la canasta. Si el jugador lanza desde una altura de 2,20 m sobre el suelo y con un ángulo de 60° con la horizontal, calcula la velocidad inicial del balón para conseguir canasta.

- 23.** Un avión de salvamento que vuela a una altura de 100 m y a una velocidad de 100 m/s tiene que lanzar un paquete de provisiones a unos naufragos que se encuentran en una balsa. Calcular:

- a) Desde qué distancia horizontal hasta la balsa tienen que soltar el paquete para que éste caiga al mar 10 m antes de la balsa. $(Desde 461,75 \text{ m})$
 b) Velocidad con que el paquete llega al mar. $(\vec{v} = 100 \vec{i} - 44,27 \vec{j} \text{ m/s})$

- 24.** Un bombardero que vuela a 150 m de altura y a una velocidad de 300 km/h tiene que destruir un tanque que avanza a 36 km/h. Para ello tiene que soltar una bomba desde cierta distancia antes de encontrarse a su altura. Calcular la distancia horizontal hasta el tanque desde la que tiene que soltar la bomba el avión:

- a) Considerando que el tanque y el avión se mueven en el mismo sentido. $(Desde 405,7 \text{ m aprox.})$
 b) considerando que el tanque y el avión se mueven en sentidos opuestos. $(Desde 516,1 \text{ m aprox.})$

Movimientos circulares:

- 25.** a) Calcula la velocidad angular y la frecuencia de giro de las tres manecillas de un reloj (horas, minutos, segundos).
 ($-1,45 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$, $-1,75 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$, $-0,105 \text{ rad/s}$)
 b) Calcula la velocidad lineal del extremo de cada manecilla si miden respectivamente 5 cm, 9 cm, 9 cm.
 ($-7,25 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$, $-1,58 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$, $-9,45 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$)
- 26.** Una rueda de 0,5 m de radio gira a 20 rad/s en sentido horario. Calcular:
 a) Periodo, frecuencia del movimiento ($0,315 \text{ s}$, $3,18 \text{ Hz}$)
 b) Ecuación del movimiento ($\theta = -20 t \text{ rad}$)
 c) Tiempo que tarda en dar 100 vueltas completas ($31,4 \text{ s}$)
 d) Ángulo recorrido en 5 minutos. (-6000 rad)
 e) Velocidad de un punto: 1) del exterior, 2) a 25 cm del centro. (-10 m/s , -5 m/s)
- 27.** Un coche circula por una rotonda circular de 40 m de diámetro de curvatura con una rapidez constante de 30 km/h. el coche entra en la rotonda por el punto marcado en el dibujo. Calcular:
 a) Aceleración tangencial y normal de este movimiento. (0 , $3,47 \text{ m/s}^2$)
 b) Velocidad angular y ecuación de movimiento. ($0,42 \text{ rad/s}$, $\theta = \pi/2 + 0,42 t \text{ rad}$)
 c) Periodo y frecuencia, si el movimiento describiera una circunferencia completa. ($14,96 \text{ s}$, $0,067 \text{ Hz}$)
 d) Tiempo que tardará en llegar a la salida de la derecha. ($11,22 \text{ s}$)
- 28.** El periodo del M.C.U. de un disco es de 5 s. Calcular, teniendo en cuenta que gira en sentido antihorario:
 a) Frecuencia, velocidad angular ($0,2 \text{ Hz}$, $1,257 \text{ rad/s}$)
 b) Ecuación de movimiento. ($\theta = 1,257 t \text{ rad}$)
 c) Velocidad de un punto del disco a 10 cm del centro. ($0,13 \text{ m/s}$)
 e) Aceleración normal de dicho punto. ($0,158 \text{ m/s}^2$)
 e) Ángulo y distancia recorrida por el punto anterior en 1 minuto. ($75,42 \text{ rad}$, $7,542 \text{ m}$)
- 29.** Los discos que se usaban en los antiguos tocadiscos (los LP) giraban a un ritmo de 33 rpm en sentido horario. Calcular:
 a) Velocidad angular, frecuencia y periodo. ($-3,46 \text{ rad/s}$, $0,55 \text{ Hz}$, $1,82 \text{ s}$)
 b) Ecuación de movimiento. ($\theta = -3,46 t \text{ rad}$)
 c) Tiempo que tardará el disco en girar 100 rad. ($28,9 \text{ s}$)
 d) Velocidad y aceleración de un punto situado: 1) a 15 cm del centro ($-0,52 \text{ m/s}$, $1,8 \text{ m/s}^2$)
 2) en el centro. (0 m/s , 0 m/s^2)
- 30.-** Una sierra eléctrica gira en sentido antihorario con una velocidad de 1000 rpm. Al desconectarla, se acaba parando en 5 s. Calcular:
 a) La aceleración angular de frenado. ($-20,94 \text{ rad/s}^2$)
 b) La aceleración tangencial de los dientes de la hoja si ésta tiene un diámetro de 30 cm. ($-3,14 \text{ m/s}^2$)
- 31.-** Un motor es capaz de imprimir una velocidad angular de 3000 rpm en sentido antihorario a un volante en 10 s cuando parte del reposo. Calcular:
 a) La aceleración angular del proceso. ($31,42 \text{ rad/s}^2$)
 b) ¿Cuántos radianes gira el volante en el tiempo anterior? (1571 rad , *aprox. 250 vueltas*)
- 32.-** Un volante gira a 3000 rpm en sentido horario y mediante la acción de un freno se logra detenerlo después de dar 50 vueltas. Calcula:
 a) ¿Qué tiempo empleó en el frenado? (2 s)
 b) ¿Cuánto vale su aceleración angular? ($157,1 \text{ rad/s}^2$)
- 33.-** La velocidad angular de un motor aumenta uniformemente desde 300 rpm hasta 900 rpm en sentido antihorario mientras el motor efectúa 50 revoluciones. Calcula:
 a) ¿Qué aceleración angular posee? ($12,6 \text{ rad/s}^2$)
 b) ¿Cuánto tiempo se empleó en el proceso? (5 s)
- 34.** Calcula, teniendo en cuenta que el radio de la Tierra es aprox. 6370 km, y suponiendo que es una esfera perfecta:
 a) Velocidad angular de rotación de la Tierra ($7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$, *rotación vista desde el Polo Norte*)
 b) Velocidad lineal de un punto de la superficie terrestre situado en el ecuador. ($463,1 \text{ m/s}$)
 c) Velocidad lineal de un punto de la superficie terrestre situado en el paralelo 37° ($369,85 \text{ m/s}$)
 d) Velocidad lineal de un punto de la superficie situado en círculo polar (paralelo 60°) ($232,55 \text{ m/s}$)
 e) Velocidad lineal de un punto de la superficie situado en el Polo Norte. (0 m/s)
 f) Aceleración normal que sufre cualquier cuerpo situado en el ecuador y en el paralelo 37° ($0,034 \text{ ms}^{-2}$, $0,027 \text{ ms}^{-2}$)