Vectores en 2 dimensiones (resumen).

Magnitudes escalares y vectoriales

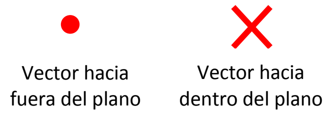
Magnitudes escalares: Para expresar su valor basta con indicar una cantidad y la unidad correspondiente.
Ejemplos: Masa, tiempo, densidad, temperatura, presión, energía, trabajo…

Magnitudes vectoriales: Además de la cantidad y unidad, es necesario conocer su dirección y sentido.
Se representan mediante un vector.
Ejemplos: Posición, desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza…

Vectores

Un vector es la representación matemática de una magnitud vectorial. Consiste en un segmento orientado (flecha), que contiene toda la información sobre la magnitud que estamos midiendo.

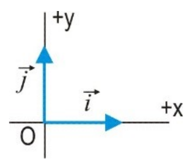
Partes del vector:
- Módulo: Longitud del segmento (valor de la magnitud: cantidad + unidades)
- Dirección: La de la recta en la que se encuentra el vector (llamada *recta soporte*)
- Sentido: Viene dado por la flecha. Dentro de la dirección, será + ó - , dependiendo del criterio que hayamos escogido en un principio.
- Punto de aplicación (origen del vector): O. Extremo del vector: E



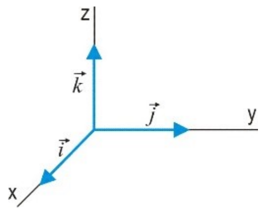
Sistema de referencia

Para localizar objetos y describir su movimiento, así como para expresar las magnitudes vectoriales, necesitamos establecer un sistema de referencia.

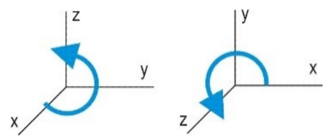
En el plano: Un punto (O , origen, pto desde el cual medimos)
Dos ejes perpendiculares, x e y.
El sentido positivo de cada eje viene marcado por un vector unitario (módulo = 1) : $\vec{i}\,,\vec{j}$



En el espacio: Punto origen (O)
Tres ejes: *x , y, z.* → tres vectores unitarios : $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$



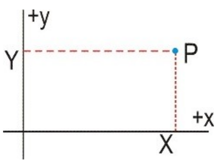
<u>Nota: Sistemas de referencia válidos:</u> En Física, por coherencia con algunas operaciones, como el producto vectorial, sólo son admisibles sistemas de referencia que sean dextrógiros, es decir, que podamos leer los ejes x, y, z por orden girando en el sentido positivo de los ángulos (dextrógiro o antihorario)



Coordenadas de un punto:

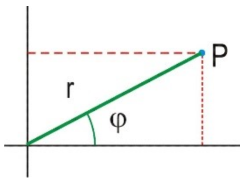
En el plano:

C. cartesianas: $P : (x , y)$



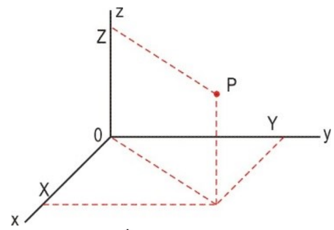
C. polares: $P: (r , \varphi)$

$x = r \cdot \cos\varphi$
$y = r \cdot \operatorname{sen}\varphi$



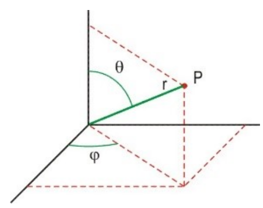
En el espacio:

C. cartesianas: $P : (x , y , z)$



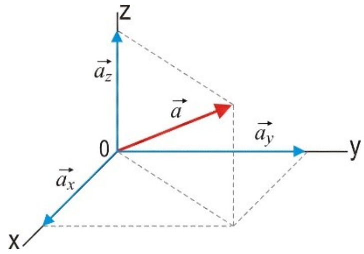
C. polares: $P: (r , \varphi, \theta)$

$x = r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\varphi$
$y = r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi$
$z = r \cdot \cos\theta$



Características de un vector (en 2 dimensiones)

Componentes de un vector:



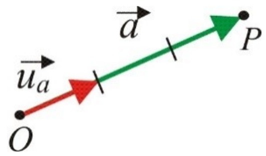
Proyecciones del vector sobre los ejes coordenados.
Explicado de forma sencilla, indican cuánto hay que desplazarse en la dirección de cada eje para ir desde el origen del vector hasta su extremo.
El vector puede expresarse como la suma de sus componentes.
$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath}$ Es la forma más usada en Física.

Otra forma, muy usada en Matemáticas, es entre paréntesis $\vec{a} = (a_x \, , a_y)$

Módulo de un vector:

Es la longitud del vector, que representa el valor numérico de la magnitud física medida.
$|\vec{a}| = a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$ El módulo de un vector **siempre es positivo**.

Vector unitario:

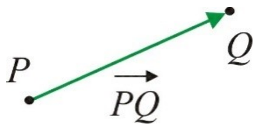


Vector en la misma dirección y sentido que $\vec{a}$, pero con módulo 1.
Para obtenerlo, dividimos el vector por su módulo

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath}}{a} = \frac{a_x}{a} \cdot \vec{\imath} + \frac{a_y}{a} \cdot \vec{\jmath}$$

Vemos que podemos expresar el vector como $\vec{a} = a \cdot \vec{u}_a$
Es decir, separamos por un lado el módulo y por otro la dirección y el sentido

Vector entre dos puntos:

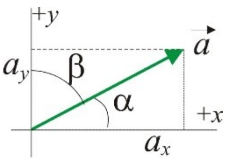


Se restan las coordenadas: coordenadas del extremo (Q) menos las coordenadas del origen (P)
$\overrightarrow{PQ} = (Q_x - P_x) \cdot \vec{\imath} + (Q_y - P_y) \cdot \vec{\jmath}$

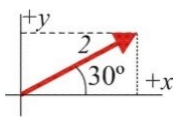
Descomposición de un vector en sus componentes:

En el plano, tenemos varias formas, en función de los ángulos que nos den en el problema.

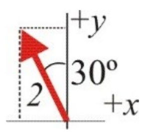
<u>Cosenos directores</u>: $a_x = a \cdot cos\alpha$, $a_y = a \cdot cos\beta$
(ángulos con los semiejes positivos)



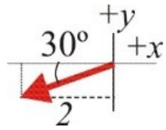
<u>Seno y coseno del ángulo que nos den</u>:
La componente contigua (pegada) al ángulo va multiplicada por $cos\alpha$ y la otra por $sen\alpha$.
De esta forma calculamos los módulos de las componentes (el valor absoluto). Posteriormente, debemos añadirle el signo que les corresponda, en función del sistema de referencia. Ejemplos:



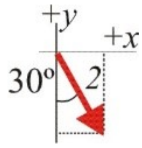
$a_x = 2 \cdot cos30º = 1{,}73$
$a_y = 2 \cdot sen30º = 1$
$\vec{a} = 1{,}73\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}$



$a_x = 2 \cdot sen30º = 1$
$a_y = 2 \cdot cos30º = 1{,}73$
$\vec{a} = -\vec{\imath} + 1{,}73\,\vec{\jmath}$



$a_x = 2 \cdot cos30º = 1{,}73$
$a_y = 2 \cdot sen30º = 1$
$\vec{a} = -1{,}73\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

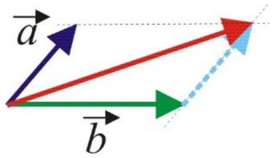


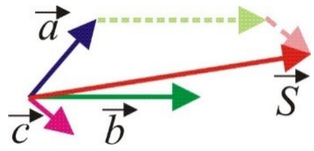
$a_x = 2 \cdot sen30º = 1$
$a_y = 2 \cdot cos30º = 1$
$\vec{a} = \vec{\imath} - 1{,}73\,\vec{\jmath}$

Operaciones con vectores

Suma de vectores:

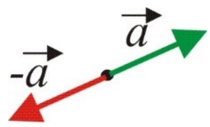
$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \cdot \vec{\imath} + (a_y + b_y) \cdot \vec{\jmath}$





Opuesto de un vector: $(-\vec{a})$

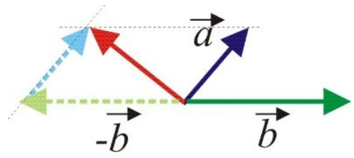
Vector con igual módulo y dirección que $\vec{a}$, pero en sentido contrario.



Diferencia entre vectores:

Restar dos vectores equivale a sumar a uno el opuesto del otro.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = (a_x - b_x) \cdot \vec{\imath} + (a_y - b_y) \cdot \vec{\jmath}$$



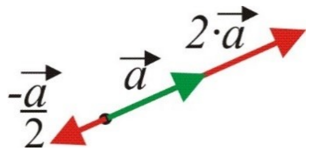
Producto (o división) por un número real: $(k \cdot \vec{a})$

El módulo se multiplica (o divide) por el valor absoluto del número $(|k| \cdot a)$

La dirección no cambia

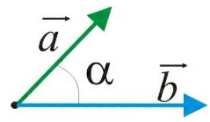
Sentido: El mismo si k > 0 El opuesto si k < 0

Con componentes: $k \cdot \vec{a} = k \cdot a_x \cdot \vec{\imath} + k \cdot a_y \cdot \vec{\jmath}$



Producto escalar de dos vectores: $(\vec{a} \cdot \vec{b})$

El resultado de esta operación es un número real $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot cos\alpha$



Algunas propiedades: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ Propiedad conmutativa

$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$

$\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = 1$ $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} = 0$

El signo del producto escalar depende del ángulo α.

- $0 < \alpha < 90º$ → $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$
- $\alpha = 90º$ → $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (Perpendicularidad)
- $\alpha > 90º$ → $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

A partir de las componentes: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$

Ángulo α entre dos vectores: $cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{a \cdot b}$