IES PADRE MANJÓN
Física y Química

TEMA 6: CINEMÁTICA. ESTUDIO DEL MOVIMIENTO.

---

1. Concepto de movimiento. Sistema de referencia. Vector de posición de una partícula. Vector desplazamiento.

1.1 Concepto de movimiento.

Supongamos que viajamos en un avión, sentados en nuestra plaza. Creemos que estamos en reposo y no dudaríamos en afirmar que alguien que camina por el pasillo está en movimiento. Pero, ¿Estamos realmente en reposo, o nos movemos junto con el avión? ¿Está realmente en reposo la mesa sobre la que apoyas estos apuntes? En definitiva, la pregunta que nos planteamos es: ¿cuándo podemos afirmar que un objeto se mueve?

Un cuerpo se mueve cuando cambia de posición respecto a un sistema de referencia que consideramos fijo.

Así, según donde esté situado el sistema de referencia (donde esté el observador que estudia el movimiento) mediremos un movimiento u otro, o no mediremos movimiento alguno.

Los movimientos, entonces, son siempre relativos, pues para un observador en la Tierra un edificio sería un objeto carente de movimiento, mientras que para un observador en el espacio, dicho edificio tendrá un movimiento de rotación y otro de traslación. Por eso hablamos de movimiento relativo, dependiendo de la ubicación del sistema de referencia.

El sistema de referencia (punto O, ejes coordenados, criterio de signos) es elegido por el observador, la persona que estudia el movimiento. Una vez elegido, debe mantenerse. No puede cambiarse durante la resolución del problema.

Punto material: En nuestro estudio del movimiento consideraremos que el objeto móvil es una partícula, un punto material que representa al objeto (bola, coche, avión, electrón…) y que concentra toda su masa.

1.2 Posición. Trayectoria. Ecuación de movimiento. Vector desplazamiento.

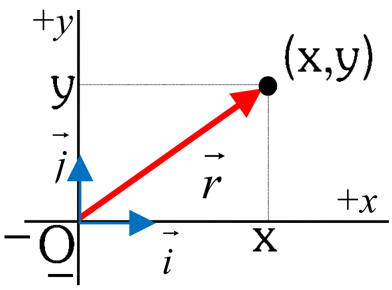
Posición ($\vec{r}$): Lugar que ocupa el móvil en un instante determinado.

- La posición se indica con las coordenadas del punto en el que está situado el móvil, medidas respecto al sistema de referencia escogido. O lo que es lo mismo, con las componentes del vector $\vec{r}$, que va desde el punto O hasta el punto en que está la partícula.
- Lógicamente, la posición de un móvil dependerá del sistema de referencia escogido.
- En el Sistema Internacional de unidades (S.I.), las coordenadas están dadas en metros (m).

Ojo!! La posición sólo indica **dónde está** el punto móvil, pero NO nos dice nada sobre la distancia que ha recorrido. Si un coche está en el km 200 de una carretera, no significa que haya recorrido 200 km, sino a qué distancia está del km 0 de esa carretera.

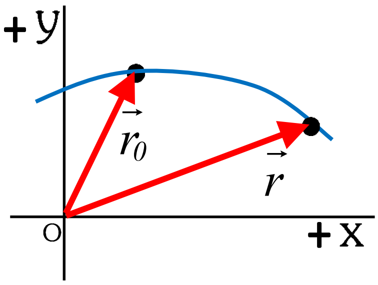
<u>En este curso estudiaremos movimientos en dos dimensiones</u>. Nuestro sistema de referencia está formado por los ejes coordenados x e y, a los que corresponden los vectores unitarios $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$. En todos los problemas es obligatorio dibujar claramente el sistema de referencia con el criterio de signos.

Así, el vector de posición $\vec{r}$ se expresará $\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$



Nota: *En el espacio (3 dimensiones), existiría una componente más, de modo que* $\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$ *. Todas las magnitudes vectoriales tendrían tres componentes.*

Trayectoria: Es la línea formada por la unión de los puntos que sigue el móvil en su recorrido.
Según la forma de la trayectoria, tendremos movimientos:
- Rectilíneos.
- Curvilíneos (puede ser parabólico, circular… o cualquiera).



Ecuación de movimiento:

Al transcurrir el tiempo, el móvil va pasando por los distintos puntos de la trayectoria. A cada valor de t, corresponde una posición. Es decir, la posición $\vec{r}$ del móvil depende del tiempo. (lo escribiremos como $\vec{r}(t)$)
A la expresión de la posición en función del tiempo $\vec{r}(t)$ se le denomina ecuación de movimiento de la partícula.
Al sustituir en ella un valor de tiempo, obtenemos las coordenadas del punto en el que se encuentra el móvil en ese instante. Cada movimiento tiene su propia ecuación de movimiento.

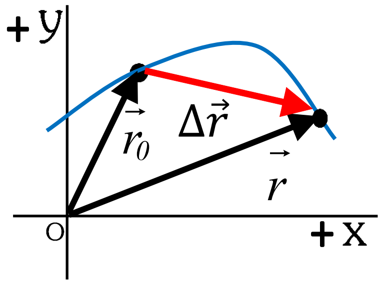
Por ejemplo: Un pájaro que vuela en horizontal a 2 m de altura sobre el suelo avanzando 4 m en cada segundo
$\vec{r}(t) = 4 \cdot t\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath}\ (S.I)$ Al cabo de 3 s su posición será $\vec{r}(3) = 12\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath}\ m$. Es decir, sigue a 2 m de altura, y está a 12 m en horizontal del punto de referencia.

Ecuaciones paramétricas: Si en la ecuación de movimiento, escribimos las coordenadas x e y por separado, obtenemos las ecuaciones paramétricas. En el ejemplo anterior:

$$\vec{r}(t) = 4 \cdot t\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath}\ (S.I) \rightarrow \begin{cases} x = 4 \cdot t \\ y = 2 \end{cases} \quad (S.I)$$

Posición inicial: $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ Posición en el instante en que empezamos a contar el movimiento. Normalmente consideraremos $t_0 = 0\ s$, pero puede ser cualquier otro valor de tiempo.

Vector desplazamiento: **($\Delta\vec{r}$):** Vector que une dos puntos de la trayectoria. Va desde la posición considerada inicial hasta la posición final. Se calcula como el incremento, la diferencia, entre las dos posiciones (siempre la final menos la inicial).
Para ello, restamos las coordenadas x e y por separado.



$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$$

Diferencia entre desplazamiento y distancia recorrida: Vemos que $\Delta\vec{r}$ mide el desplazamiento en línea recta. El módulo del desplazamiento ($|\Delta\vec{r}|$) sólo nos indica la distancia en línea recta desde el punto inicial hasta el punto final. La distancia recorrida (s) se mide sobre la trayectoria. Los valores de $|\Delta\vec{r}|$ y s sólo coinciden cuando la trayectoria es rectilínea.

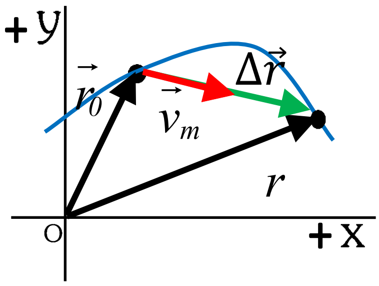
2. Velocidad media e instantánea.

Todo movimiento supone un cambio en la posición del móvil. Pero este cambio puede ser más rápido o más lento. La **velocidad** mide la rapidez de ese cambio. Es decir, la velocidad mide cómo cambia la posición de un móvil con el tiempo.

2.1 Velocidad media:

Mide el cambio de posición en un intervalo de tiempo.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0}$$



Unidades: En el S.I. $[v_m] = m/s = m \cdot s^{-1}$
Otras unidades: km/h, nudos (millas marinas/h)
Del mismo modo que el vector desplazamiento, la velocidad media sólo tiene en cuenta los instantes inicial y final, independientemente de cómo haya sido el movimiento entre ambos instantes. Sólo nos da información sobre el promedio de velocidad en el intervalo. NO nos dice cómo se mueve en un instante concreto.

2.2 Velocidad instantánea ($\vec{v}$): Indica cómo varía la posición del móvil en cada instante.

Hemos visto que la velocidad media no nos da información sobre cómo se mueve la partícula en un instante concreto. Pero si calculamos la velocidad media en un intervalo corto de tiempo, la información del movimiento resulta más precisa. Cuanto más corto sea el tiempo que dejemos pasar, más se aproximará la velocidad media a la velocidad que lleva el móvil en el instante que estamos estudiando (velocidad instantánea).
Matemáticamente, esta operación se calcula mediante un paso al límite.

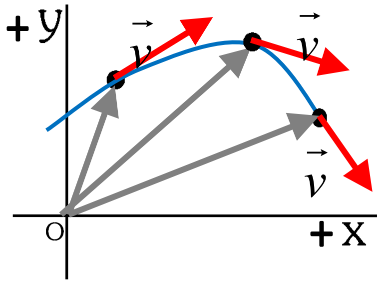
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0}$$

Esta operación se denomina derivada (en este caso "derivada de la posición respecto al tiempo").

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \rightarrow \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Nota: Derivada de una función. La derivada respecto al tiempo de una función nos indica cómo cambia esa función respecto al tiempo. Es una operación que tiene sus propias reglas de cálculo, de las que sólo vamos a ver brevemente las que nos interesan.	***Función: f(t)***	***Derivada:*** $\frac{df(t)}{dt}$
	$a = cte$	0
	t	1
	$a \cdot t$	a
	$a \cdot t^{n}$	$a \cdot n \cdot t^{n-1}$
	$\sqrt{f(t)}$	$\dfrac{\frac{df}{dt}}{2 \cdot \sqrt{f(t)}}$
	$f(t) \pm g(t)$	$\dfrac{df}{dt} \pm \dfrac{dg}{dt}$

Teniendo en cuenta que el vector de posición tiene dos componentes $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$, la velocidad también tendrá dos componentes. $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j}$

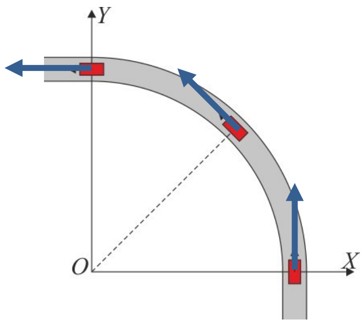


· Su **módulo** ($v = |\vec{v}|$) se denomina **rapidez**. (también *celeridad*)
· Se mide en m·s^{-1}. Y se calcula $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
· Su dirección y sentido nos indican hacia dónde se mueve la partícula en ese momento.
· El vector velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria en cada punto.

3. Aceleración. Componentes intrínsecas de la aceleración.

Supongamos un movimiento en el que la velocidad se mantiene constante en todo momento. Eso significa:
- Que recorre los mismos metros en cada segundo (rapidez constante)
- Que la dirección y sentido del movimiento se mantienen constantes, no cambian. Su trayectoria es recta.

No podemos olvidar este segundo aspecto de la velocidad. Un automóvil que toma una curva manteniendo su rapidez a 60 km/h, NO lleva velocidad constante, ya que hay algo que cambia en la velocidad: su dirección.



Para estudiar los cambios en la velocidad (ya sea en módulo o en dirección) usamos una magnitud vectorial: la **aceleración**.

<u>Nota:</u> Es importante tener en cuenta que el concepto de aceleración no tiene por qué significar que el movimiento sea más rápido. Puede ser también un frenado, o puede que la rapidez sea constante y cambie la dirección. La palabra aceleración se usa para todo eso.

3.1 Aceleración media: ($\vec{a}_m$)

Mide el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo, calculando cuánto ha cambiado la velocidad ($\Delta\vec{v}$), y dividiéndolo entre el tiempo transcurrido (Δt)

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t-t_0}$$

Unidades: En el S.I. $[a_m] = m/s^2 = m \cdot s^{-2}$

Al igual que en el caso de la velocidad, la aceleración media sólo tiene en cuenta los instantes inicial y final, independientemente de cómo haya sido el movimiento entre ambos instantes.

3.2 Aceleración instantánea ($\vec{a}$):

Indica cómo cambia la velocidad del móvil en un instante determinado.

Al igual que en el caso de la velocidad instantánea, se calcula como una derivada. $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Es decir, la aceleración mide cómo cambia la velocidad de móvil en cada instante, ya sea porque **cambia**:
- El **módulo** de la velocidad (su rapidez), es decir, va más rápido o más lento.
- La **dirección** del movimiento (hace una trayectoria curva).

Se mide en las mismas unidades que la aceleración media. $[a_m] = m/s^2 = m \cdot s^{-2}$

Por ejemplo, si el módulo de una aceleración es de 2 m/s^2, significa que su rapidez cambia en 2 m/s por cada segundo de tiempo que pasa. La aceleración NO nos dice nada sobre distancia recorrida

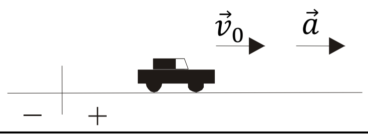
Importante: Es preciso tener muy claro que <u>la aceleración NO nos dice cómo se mueve la partícula ni hacia dónde se mueve</u>. Eso nos lo indica la velocidad. La aceleración nos informa de si la velocidad cambia, de qué modo y hacia dónde está cambiando.

El vector aceleración tiene componentes cartesianas x e y.

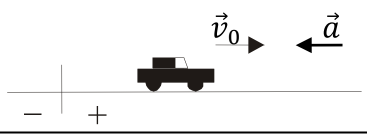
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$$

a_x y a_y nos indican cómo acelera el móvil en cada una de las direcciones del espacio.

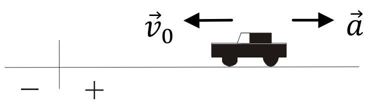
Cuestión. ¿Cómo sabemos si un móvil va cada vez más rápido o cada vez más lento? Debemos tener en cuenta no sólo cómo acelera, sino también cómo se movía previamente. Vamos a estudiarlo con un ejemplo. Supongamos cuatro movimientos. La única diferencia entre ellos será el signo de la velocidad inicial y de la aceleración. Rellena las cuatro tablas siguientes. ¿A qué conclusión llegas?



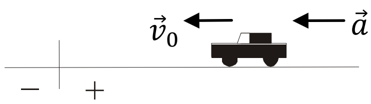
A) v_0 = 10 m/s ; a = 2 m/s^2						
t(s)	0	1	2	3	4	5
v						



B) v_0 = 10 m/s ; a = - 2 m/s^2						
t(s)	0	1	2	3	4	5
v						



C) v_0 = - 10 m/s ; a = 2 m/s^2						
t(s)	0	1	2	3	4	5
v						

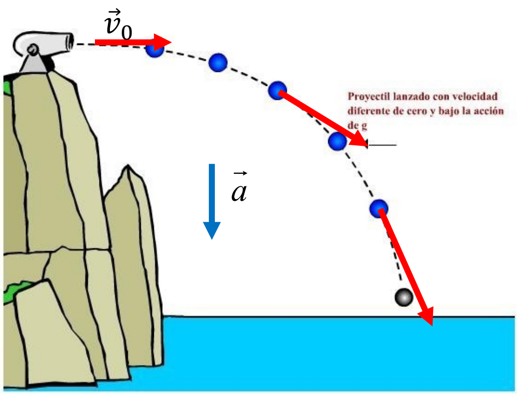


D) v_0 = - 10 m/s ; a = - 2 m/s^2						
t(s)	0	1	2	3	4	5
v						

Cuestión: ¿Se mueve siempre el móvil hacia donde indica la aceleración?

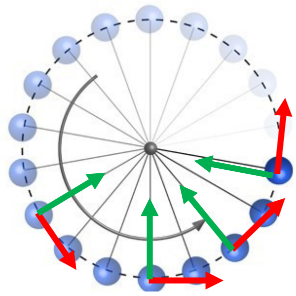
NO. Es la velocidad la que indica hacia dónde se mueve en cada instante. Ahora bien, si existe aceleración, la velocidad irá cambiando progresivamente hacia donde indica la aceleración.

Por ejemplo: Lanzamos un cuerpo hacia arriba. Una vez que lo hemos soltado, sólo sufre la aceleración de la gravedad, que tira de él hacia abajo. El vector velocidad va hacia arriba y la aceleración hacia abajo. Pero el objeto no se mueve inmediatamente hacia abajo, sino que poco a poco va frenando hasta que su velocidad se hace cero y comienza a caer. Desde ese momento sí se mueve en el mismo sentido que la aceleración.



Otro ejemplo: Lanzamos un cuerpo en dirección horizontal. Aunque la aceleración va en vertical, inicialmente el objeto se mueve en horizontal, y progresivamente la velocidad se va desviando hacia abajo, aunque nunca caerá totalmente en vertical, siempre seguirá avanzando en horizontal al mismo tiempo que cae.

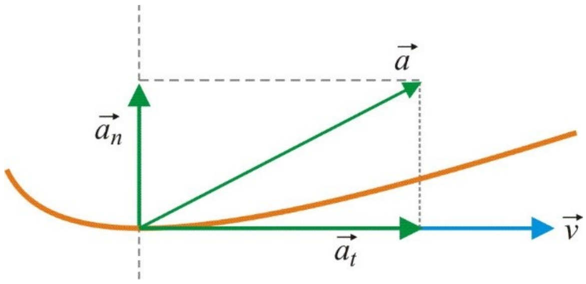
De hecho, es posible incluso que se mueva permanentemente en una dirección distinta de la de la aceleración, sin ir ni más rápido ni más lento. Esto ocurre cuando la aceleración es perpendicular (forma 90º) con la velocidad. Entonces el móvil sigue una trayectoria circular a ritmo constante. Lo explicamos en el siguiente apartado.



3.3 Componentes intrínsecas de la aceleración: aceleraciones tangencial (a_t) y normal (a_n)

Cuando en un movimiento cambia la velocidad, puede ser que cambie su rapidez, su dirección, o ambas cosas.

Podemos estudiar estos cambios por separado, descomponiendo la aceleración como la suma de dos componentes distintas de las cartesianas, denominadas **componentes intrínsecas** :



Aceleración tangencial (a_t):

· Lleva la misma dirección del vector velocidad (puede ir en el mismo sentido o en el opuesto). **NO modifica la dirección** del movimiento.

· **Modifica la rapidez** (el módulo de la velocidad). Hace que el movimiento sea más rápido o más lento.

Si el sentido de $\vec{a}_t$ coincide con el de $\vec{v}$ → aumenta la rapidez

Si el sentido de $\vec{a}_t$ es el opuesto al de $\vec{v}$ → disminuye la rapidez

En módulo, se calcula con la expresión $a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$

Por ejemplo, al pisar el acelerador o el freno de un coche originamos una aceleración tangencial. Varía la rapidez, pero no cambia la dirección.

Aceleración normal (o centrípeta) (a_n):

· Lleva dirección perpendicular (=normal) a la velocidad. **Modifica la dirección** del movimiento, indicando hacia dónde se desvía. Apunta hacia el centro de la curva.

· **NO modifica la rapidez** (el módulo de la velocidad).

En módulo, se calcula con $a_n = \frac{v^2}{R}$ donde R es el radio de la curva que describe en ese momento

Por ejemplo, al girar el volante del coche originamos una aceleración normal, que hace variar la dirección del movimiento.

La suma de ambas componentes es, lógicamente, el vector aceleración:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \rightarrow \quad en\ módulo \quad \rightarrow \quad a^2 = {a_t}^2 + {a_n}^2$$

4. Clasificación de movimientos:

Existen múltiples clasificaciones posibles para los movimientos. Veremos dos de ellas.

Según los valores de $\vec{a}$ y $\vec{v}$:

- $\vec{a} = 0$, $\vec{v}$ = cte= 0. → Estado de reposo
- $\vec{v}$ = cte ≠ 0. → Movimiento rectilíneo uniforme (MRU):
- $\vec{a}$ =cte ≠ 0 → Movimiento uniformemente acelerado (MUA)
  - · Si $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$ van en la misma dirección → Trayectoria recta (MRUA)
  - · Si $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$ tienen direcciones distintas → Trayectoria curva. Movimiento parabólico
- $\vec{a}$ ≠ cte → Movimiento variado.

Según los valores de a_t y a_n :

- $a_t = 0$ → Rapidez constante. Movimiento uniforme (no tiene por qué ser rectilíneo)
- $a_t = 0$ y $a_n = cte$ → $v = cte$, $R = \dfrac{v^2}{a_n} = cte$ Movimiento circular uniforme (MCU)
- $a_n = 0$ → Trayectoria recta → Movimiento rectilíneo (no tiene por qué ser uniforme).
- a_t y a_n variables → Movimiento variado.

5. Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU):

Este tipo de movimiento se caracteriza por una velocidad constante en módulo, dirección y sentido. Por tanto:
- Su aceleración es nula ($\vec{a} = 0$). Como consecuencia:
- Su velocidad es constante ($\vec{v}$ = cte). Y esto significa
  - Su rapidez es constante (recorre la misma distancia en cada segundo)
  - Su trayectoria es rectilínea (al ser constante la dirección de la velocidad en todo momento).

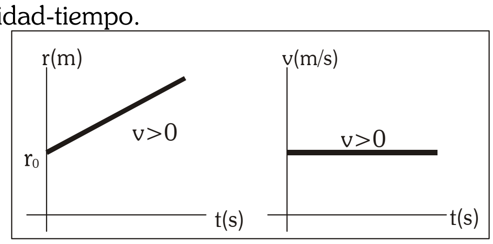
Ecuación del MRU: Sabiendo que el vector velocidad se mantiene constante ($\vec{v}$ =cte)

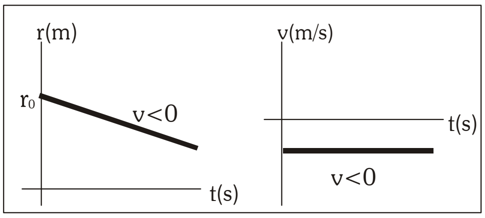
$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{t-t_0} \rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}\cdot(t-t_0) \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}\cdot(t-t_0)$$

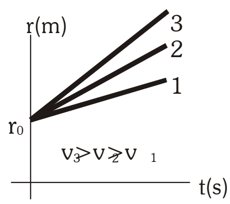
Si $t_0 = 0\,s$, $\rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}\cdot t$

Gráficas del movimiento uniforme.

Teniendo en cuenta las características del movimiento uniforme (velocidad constante, se recorre la misma distancia en el mismo tiempo) y de la ecuación de movimiento resultante, es fácil saber qué forma tendrán las gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo.







5.1 Resolución de problemas sobre movimiento: Pasos a seguir.

1º- Esquema del problema, indicando claramente el sistema de referencia y criterio de signos. (Esto es fundamental, ya que todos los datos y magnitudes del problema los calcularemos según ese sistema de referencia. No se puede cambiar durante el problema).

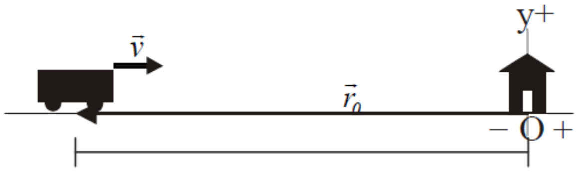
2º- Datos del problema (tipo de movimiento, posición inicial, velocidad, inicial, aceleración). Todas esas son magnitudes vectoriales, deben llevar vectores unitarios según el sistema de referencia escogido, además de sus unidades.

3º- Ecuación del movimiento y ecuación de velocidad: sustituir los datos. Descomponer en los ejes x e y.

4º- A partir de estas ecuaciones, calculamos lo que nos pide el problema (en muchas ocasiones, un dato servirá para calcular el valor del tiempo en una de las ecuaciones, y sustituirlo luego en otra ecuación).

Ejemplo: Resolución de un movimiento rectilíneo uniforme en una dimensión (eje x):
Un tren se aproxima a la estación con una velocidad constante de 72 km/h. Inicialmente se encuentra a 5 km de la estación. Calcule:

a) Ecuación de movimiento del tren.
b) Posición al cabo de 1 minuto
c) Desplazamiento en ese tiempo
d) Tiempo que tarda en llegar a la estación, suponiendo que mantiene constante la velocidad.



En este caso, hemos colocado el sistema de referencia en la estación.
Datos iniciales (en unidades S.I.): (72 km/h = 20 m/s)
$\vec{r}_0 = -5000\ \vec{i}$ m , $\vec{v} = 20\ \vec{i}$ m/s = cte , $t_0 = 0$
Se trata de un movimiento rectilíneo uniforme (MRU), ya que la velocidad se mantiene constante en módulo y dirección.

a) Ecuación de movimiento: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t$ → $\vec{r} = -5000\ \vec{i} + 20\ t\ \vec{i}$ (m) → x = - 5000 + 20 t (m)

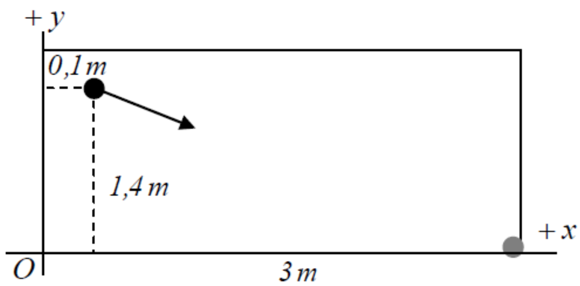
b) Para t = 1 min = 60 s → x (60) = - 3800 m Se encuentra a 3800 m de la estación.

c) $\Delta x = x - x_0 = -3800 - (-5000)$ m = 1200 m . Se ha desplazado 1200 m en sentido positivo.

d) Cuando llega a la estación: x = 0 → - 5000 + 20 t = 0 → t = 250 s tarda en llegar a la estación.

Ejemplo: Resolución de un movimiento rectilíneo uniforme en dos dimensiones:

Un cochecito de juguete se mueve a velocidad constante por una mesa horizontal de 3 m de largo y 1,5 m de ancho. Parte de un punto situado a 10 cm del borde izquierdo y a 10 cm del borde superior. Vemos que, al cabo de 6 s, cae al suelo justo por la esquina inferior derecha. Calcule la velocidad del cochecito y la ecuación del movimiento.



Colocamos el S.R. (O) en la esquina inferior izquierda.
Datos iniciales (en unidades S.I.):
$\vec{r}_0 = 0{,}1\,\vec{i} + 1{,}4\,\vec{j}\ m$, $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}\ m/s$ *(la velocidad tendrá dos componentes, que no conocemos)*, $t_0 = 0$

Se trata de un movimiento rectilíneo uniforme (MRU), ya que la velocidad se mantiene constante en módulo y dirección. Ecuación de movimiento:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t \rightarrow \vec{r} = 0{,}1\,\vec{i} + 1{,}4\,\vec{j} + v_x \cdot t\,\vec{i} + v_y \cdot t\,\vec{j}\ (m) \rightarrow \begin{cases} x = 0{,}1 + v_x \cdot t & (m) \\ y = 1{,}4 + v_y \cdot t & (m) \end{cases}$$

Sabemos que, pasados 6 s, llega a la esquina inferior derecha (coordenadas x= 3 m, y = 0 m). Sustituimos.

$$3 = 0{,}1 + v_x \cdot 6 \rightarrow v_x = 0{,}48\ m/s$$

$$0 = 1{,}4 + v_y \cdot 6 \rightarrow v_y = -2{,}33\ m/s \qquad \vec{v} = 0{,}48\,\vec{i} - 2{,}33\,\vec{j}\ m/s$$

Ecuación de movimiento: $\vec{r} = (0{,}1 + 0{,}48 \cdot t)\,\vec{i} + (1{,}4 - 2{,}33 \cdot t)\,\vec{j}\ m$

6. Relatividad del movimiento. Principio de relatividad de Galileo.

Comenzábamos el tema preguntándonos cuándo consideramos que algo está en movimiento.

El principio de relatividad galileana es el reconocimiento del carácter relativo del movimiento, fue formulado de modo más o menos explícito por Galieo Galilei en 1632, que él mismo explicaba muy descriptivamente del siguiente modo:

> *Encerraos con un amigo en la cabina principal bajo la cubierta de un barco grande, y llevad con vosotros moscas, mariposas, y otros pequeños animales voladores... colgad una botella que se vacíe gota a gota en un amplio recipiente colocado por debajo de la misma... haced que el barco vaya con la velocidad que queráis, siempre que el movimiento sea uniforme y no haya fluctuaciones en un sentido u otro.... Las gotas caerán... en el recipiente inferior sin desviarse a la popa, aunque el barco haya avanzado mientras las gotas están en el aire... las mariposas y las moscas seguirán su vuelo por igual hacia cada lado, y no sucederá que se concentren en la popa, como si se cansaran de seguir el curso del barco...*
>
> *Galileo Galilei "Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo".*

Es decir, si viajamos dentro de un sistema de referencia en movimiento uniforme, no somos capaces de distinguir si nos movemos o no. Cualquier experimento que realicemos, obtendrá el mismo resultado que si estuviéramos en reposo. Ambas formas de explicar lo que le ocurre a los cuerpos del interior del barco son válidas.

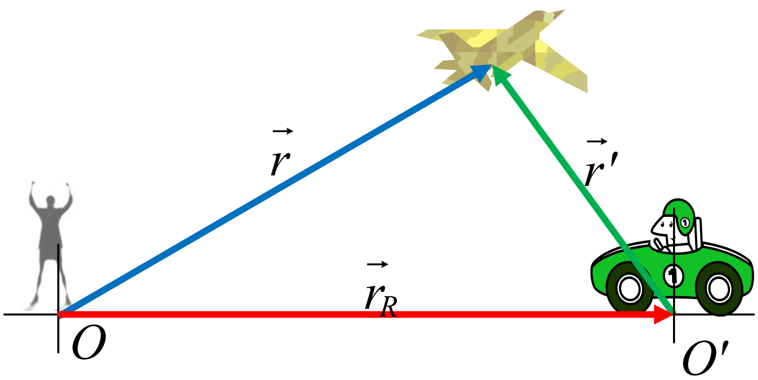
Algo parecido pasa cuando vamos en coche a 100 km/h y hay una mosca en el interior, que se posa sobre un asiento. Un observador que viaje en el coche no tiene inconveniente en decir que la mosca está en reposo, y lleva razón, porque respecto a su sistema de referencia así es. Sin embargo, para un observador que esté en la carretera, observa que la mosca viaja a 100 km/h junto con el coche.

Es decir, la velocidad que mida un observador depende del cómo se mueva su sistema de referencia. Si dos coches circulan por la misma carretera a 100 km/h, pero en sentido contrarios, acercándose, cada uno verá que el otro coche se acerca a 200 km/h.

¿Existe alguna relación entre las posiciones y velocidades que miden dos observadores, O y O' ? Sí, y podemos conocerla si sabemos la posición y la velocidad de un observador respecto a otro.

Así. $\vec{r} = \vec{r}_R + \vec{r}'$ donde $\vec{r}$ es la posición del móvil medida por O,
$\vec{r}'$ la posición del móvil medida por O',
$\vec{r}_R$ la posición relativa, es decir, la posición del observador O' respecto a O.

Del mismo modo, con las velocidades $\vec{v} = \vec{v}_R + \vec{v}'$



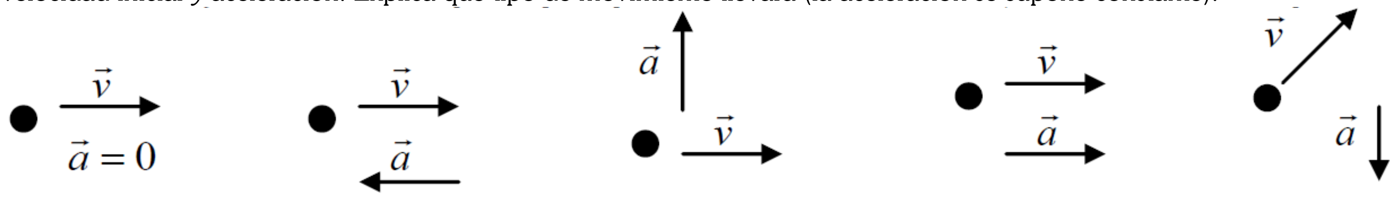
Cuestiones teóricas:

C.1. ¿Cómo será la trayectoria de un movimiento con las siguientes características?:

a) $a = 0$ b) $a_n = 0$ c) $a_t = 0$, $a_n = cte$ d) $a_t = 0$, a_n *aumentando*

e) $\vec{a}$ = cte y paralela a $\vec{v}_0$, f) $\vec{a}$ = cte y no paralela a $\vec{v}_0$.

C.2 Dibuja la trayectoria aproximada que seguiría en cada caso el punto móvil de la figura, atendiendo a los datos de velocidad inicial y aceleración. Explica qué tipo de movimiento llevará (la aceleración se supone constante).



Problemas numéricos:

1.- La ecuación de movimiento de un móvil es $\vec{r} = 3\,t\,\vec{i} + (2\,t^2 + 3)\,\vec{j}$ (m). Calcular:

a) Vector de posición inicial.
b) Ídem a los 5 segundos.
c) Vector desplazamiento en el intervalo t=0 y t=5 s, y su módulo.
d) Ecuaciones paramétricas.
e) Ecuación de la trayectoria.

2.-Las ecuaciones paramétricas para el movimiento de una partícula son, en unidades del S.I.: $x = t + 1;\ y = t^2$.
Escribe la expresión del vector de posición y halla la ecuación de la trayectoria.

3.-La Ecuación del movimiento de un objeto viene dada por: $\vec{r} = 3\vec{i} + 2\,t\,\vec{j}$ (m). Calcula:

a) La ecuación de la Trayectoria
b) Vector de posición en t=0 y en t=4 s.
c) Vector desplazamiento para ese intervalo. ¿Coincide el módulo del vector desplazamiento con la distancia recorrida? Razona por qué.

4.-El vector de posición de una partícula en cualquier instante viene dado por $\vec{r} = 5\,t^2\vec{i} + 6\,t\,\vec{j}$, donde $\vec{r}$ se expresa en metros y t en segundos. Calcula la velocidad con que se mueve la partícula en cualquier instante y su módulo en el instante t=2 s.

5. El movimiento de una partícula viene dado por $\vec{r} = 2\,t\,\vec{i} + (5 - t^2)\,\vec{j}$ (m). Calcula:

a) Ecuaciones paramétricas.
b) Dibuja aproximadamente la trayectoria que describe el movimiento.
c) Desplazamiento durante el tercer segundo de su movimiento.

6.-La ecuación del movimiento de un objeto es: $\vec{r} = 3\,t^2\vec{i} + 2\,t\,\vec{j}$ (m). Calcula:

a) Velocidad media entre t=2 s y t=5 s.
b) Módulo del vector velocidad media entre t=2 s y t=5 s.
c) Velocidad instantánea y su módulo.
d) Velocidad en t=3 s y su módulo.

7.- La ecuación de movimiento de un móvil es $\vec{r} = (2\,t - 4)\,\vec{i} + (t^2 - 3\,t)\,\vec{j}$ (m). Calcular:

a) Vector de posición inicial.
b) Ídem a los 3 segundos.
c) Vector desplazamiento en el intervalo t=0 y t=3 s, y su módulo.

d) Ecuaciones paramétricas.
e) Ecuación de la trayectoria.

8.-Las posiciones que ocupa un móvil vienen dadas por: $x = 1/2t^2 - 3$; $y = t - 2$ (S.I). Averiguar:
a) Vector de posición del móvil a los dos segundos.
b) Ecuación de la trayectoria.
c) Velocidad a los dos segundos y el valor del módulo en ese instante.

9.-La ecuación del movimiento de un móvil es: $\vec{r} = (6t^3 + 8t^2 + 2t - 5)\ \vec{i}$ (S.I). Calcular:
a) El valor del vector de posición, el vector velocidad y el vector aceleración para t=3 s.
b) Módulo de cada uno de los vectores.

10.- Un móvil se mueve sobre un plano, las componentes de la velocidad son, $v_x = t^2$ (m/s); $v_y = 2$ m/s. Calcular:
a) Aceleración media durante el primer segundo.
b) Vector aceleración y su módulo para t = 1 s.
c) El módulo de las aceleraciones tangencial y normal para t=1 s.
d) El radio de curvatura de la trayectoria para t = 1 s.

11.-Un punto en su movimiento tiene la siguiente ecuación de movimiento $\vec{r} = t^3\vec{i} + 2\,t^2\,\vec{j}$ (m). Si la aceleración normal del punto al cabo de 2 s es de 3,344 m/s^2. ¿Cuál es el radio de curvatura de la trayectoria en ese punto?

12.-La posición de un punto que se mueve en línea recta a lo largo del eje de abscisas (eje horizontal varía con el tiempo, según la ecuación: $x = 4\,t^2 - 3\,t + 11$ (S.I).
a) Calcula la velocidad y la aceleración con que se mueve el punto en cualquier instante.
b) Valor de la velocidad y aceleración para t=2 s y t= 3 s.

13.-Calcular la velocidad y la aceleración de un móvil conociendo la ecuación del movimiento del mismo:
$\vec{r} = (t - 5)\ \vec{i} + (2\,t^3 - 3\,t)\ \vec{j}$ (m).

14.-La posición de una partícula, viene dada por las siguientes ecuaciones paramétricas:
$x = t^2;\ y = 3\,t;\ z = 5$ (S.I.)
Hallar la posición, velocidad y aceleración de la partícula a los 2 s.

15.-El vector de posición de un punto es $\vec{r} = (t + 1)\ \vec{i} + t^2\,\vec{j} + (t^4 - 4\,t^2)\ \vec{k}$ (m). Calcular:
a) Posición, velocidad y aceleración en t=2 s (vector y módulo).
b) Velocidad media entre t=2 s y t=5 s y su modulo.

16. Un tren que marcha por una vía recta a una velocidad de 72 km/h se encuentra, cuando comenzamos a estudiar su movimiento, a 3 km de la estación, alejándose de ésta. Calcula: a) Ecuación de movimiento del tren.
b) Tiempo que hace que pasó por la estación, suponiendo que siempre lleva movimiento uniforme.

17. En una etapa contrarreloj, un ciclista circula a 30 km/h. A 1 km por delante de él marcha otro ciclista a 20 km/h.
a) Calcular el tiempo que tardan en encontrarse y su posición en ese instante.
b) Resolver el problema suponiendo que los dos ciclistas circulan en sentidos opuestos.

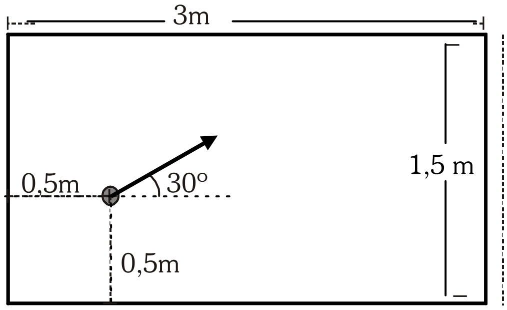
18. Un guepardo ve a una gacela a 150 m de distancia, y emprende una rápida carrera para cazarla. En ese mismo instante la gacela se da cuenta y huye hacia unos matorrales, situados a 280 m de la gacela, que pueden servirle de refugio. Suponiendo ambos movimientos como uniformes (velocidad del guepardo: 108 km/h, velocidad de la gacela: 72 km/h) ¿Quién sale ganando en esta lucha por la supervivencia?

19. Una barca cruza un río de 1000 m de ancho navegando siempre perpendicular a la orilla. Si la velocidad media que imprime el motor a la barca es de 25 km/h y el río fluye a 1,5 m/s.
a) ¿Qué distancia a lo largo del río habrá recorrido la barca cuando llegue al otro lado?
b) ¿Con qué orientación debería navegar para llegar a la otra orilla justo enfrente de donde salió?

20. Jugando al billar, golpeamos la bola, que se encuentra inicialmente en el punto que indica la figura, imprimiéndole una velocidad de 1 m/s en la dirección dibujada. Despreciamos el rozamiento.

a) Calcule razonadamente la ecuación de movimiento de la bola.

b) Calcule en qué punto de la banda rebota la bola.



Soluciones numéricas:

1. *a)* $\vec r_0 = 3\,\vec j\ m$; *b)* $\vec r\,(5) = 15\,\vec\imath + 53\,\vec j\ m$; *c)* $\Delta\vec r = 15\vec\imath + 50\,\vec j\ m$, $\Delta r = 52{,}2\ m$;
   d) $x = 3\,t\ (m)$, $y = 2\,t^2 + 3\ (m)$ *e)* . $y = 2/9\,x^2 + 3$
2. $\vec r\,(t) = (t+1)\,\vec\imath + t^2\,\vec j$; $y = x^2 - 2\,x + 1$
3. *a)* $x = 3$; *b)* $\vec r_0 = 3\,\vec\imath\ m$, $\vec r\,(4) = 3\vec\imath + 8\,\vec j\ (m)$; *c)* $\Delta\vec r = 8\,\vec j\ m$, $\Delta r = 8\ m$. *Coinciden*
4. $\vec v = 10\,t\,\vec\imath + 6\,\vec j\ m\,s^{-1}$; $\vec v\,(2) = 20\vec\imath + 6\,\vec j\ m\,s^{-1}$; $v = 20{,}88\ m\,s^{-1}$
5. *a)* $x = 2t\ (m)$, $y = 5 - t^2\ (m)$; *b) La curva es una parábola* ; *c)* $\Delta\vec r = \vec r\,(3) - \vec r\,(2) = 2\,\vec\imath - 5\,\vec j\ m$.
6. *a)* $\vec v_m = 21\,\vec\imath + 2\,\vec j\ m\,s^{-1}$; *b)* $v = 21{,}1\ m\,s^{-1}$; *c)* $\vec v\,(t) = 6\,t\,\vec\imath + 2\,\vec j\ m\,s^{-1}$ $v = \sqrt{36t^2+4}\ m\,s^{-1}$
   d) $\vec v\,(3) = 18\,\vec\imath + 2\,\vec j\ m\,s^{-1}$, $v(3) = 18{,}11\ m\,s^{-1}$
7. *a)* $\vec r_0 = -4\,\vec\imath\ m$; *b)* $\vec r\,(3) = 2\vec\imath\ m$; *c)* $\Delta\vec r = 6\,\vec\imath\ m$, $\Delta r = 6\ m$. ; *d)* $x = 2\,t - 4\ m$, $y = t^2 - 3\,t\ m$
   e) $y = \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x - 2\ (m)$
8. *a)* $\vec r\,(2) = -\vec\imath\ m$; *b)* $y = \sqrt{2x+6} - 2$; *o también* $x = \frac{1}{2}\,y^2 + 2y - 1$
   c) $\vec v\,(2) = 2\,\vec\imath + \vec j\ m\,s^{-1}$; $v(2) = 2{,}24\ m\,s^{-1}$
9. *a)* $\vec r\,(3) = 235\,\vec\imath\ m$, $\vec v\,(3) = 212\,\vec\imath\ m\,s^{-1}$, $\vec a\,(3) = 124\,\vec\imath\ m\,s^{-2}$;
   b) $r(3) = 235\ m$, $v(3) = 212\ m\,s^{-1}$, $a(3) = 124\ m\,s^{-2}$
10. *a)* $\vec a_m = \vec\imath\ ms^{-2}$; *b)* $\vec a\,(t) = 2\,t\,\vec\imath\ ms^{-2}$, $a(1) = 2\ ms^{-2}$; *c)* $a_t(1) = 0{,}894\ ms^{-2}$, $a_n(1) = 1{,}789\ ms^{-2}$
    d) $R(1) = 2{,}79\ m$.
11. $R = 62{,}2\ m$.
12. *a)* $\vec r\,(t) = 4t^2 - 3t + 11\ (m)$; *b)* $\vec v\,(t) = (8t - 3)\,\vec\imath\ m\,s^{-1}$, $\vec a = 8\vec\imath\ m\,s^{-2}$;
    c) $\vec v\,(2) = 13\,\vec\imath\ m\,s^{-1}$, $\vec v\,(2) = 21\,\vec\imath\ m\,s^{-1}$; $\vec a\,(2) = \vec a\,(3) = 8\vec\imath\ m\,s^{-2} = cte.$
13. $\vec v\,(t) = \vec\imath + (6\,t^2 - 3)\,\vec j\ m\,s^{-1}$, $\vec a\,(t) = 12\,t\,\vec j\ m\,s^{-2}$
14. $\vec r\,(2) = 4\vec\imath + 6\,\vec j + 5\,\vec k\ m$; $\vec v\,(2) = 4\,\vec\imath + 3\,\vec j\ m\,s^{-1}$; $\vec a = 2\,\vec\imath\ m\,s^{-2}$
15. *a)* $\vec r\,(2) = 3\,\vec\imath + 4\,\vec j\ m$, $r(2) = 5\ m$; $\vec v\,(2) = \vec\imath + 4\,\vec j + 16\,\vec k\ m\,s^{-1}$, $v(2) = 16{,}52\ m\,s^{-1}$;
    $\vec a\,(2) = 2\,\vec j + 40\,\vec k\ m\,s^{-2}$, $a(2) = 40{,}05\ m\,s^{-2}$; *b)* $\vec v_m = \vec\imath + 7\,\vec j + 175\,\vec k\ m\,s^{-1}$, $v_m = 175{,}14\ m/s$
16. *a)* $\vec r = (3000 + 20 \cdot t)\,\vec\imath\ (S.I)$; *b) 2 min y 30 s.*
17. *a)* 361 s , $3007\,\vec\imath\ m$ *b)* 72 s. , 600 i m
18. *La gacela se escapa.*
19. *a)* 216,14 m *b) Con una* $\vec v = -1{,}5\,\vec\imath + 6{,}94\,\vec j\ m/s$
20. *a)* $\vec r = (0{,}5 + 0{,}87\,t)\,\vec\imath + (0{,}5 + 0{,}5\,t)\,\vec j\ m$ *b) Rebota a 2,24 m de la banda izquierda*