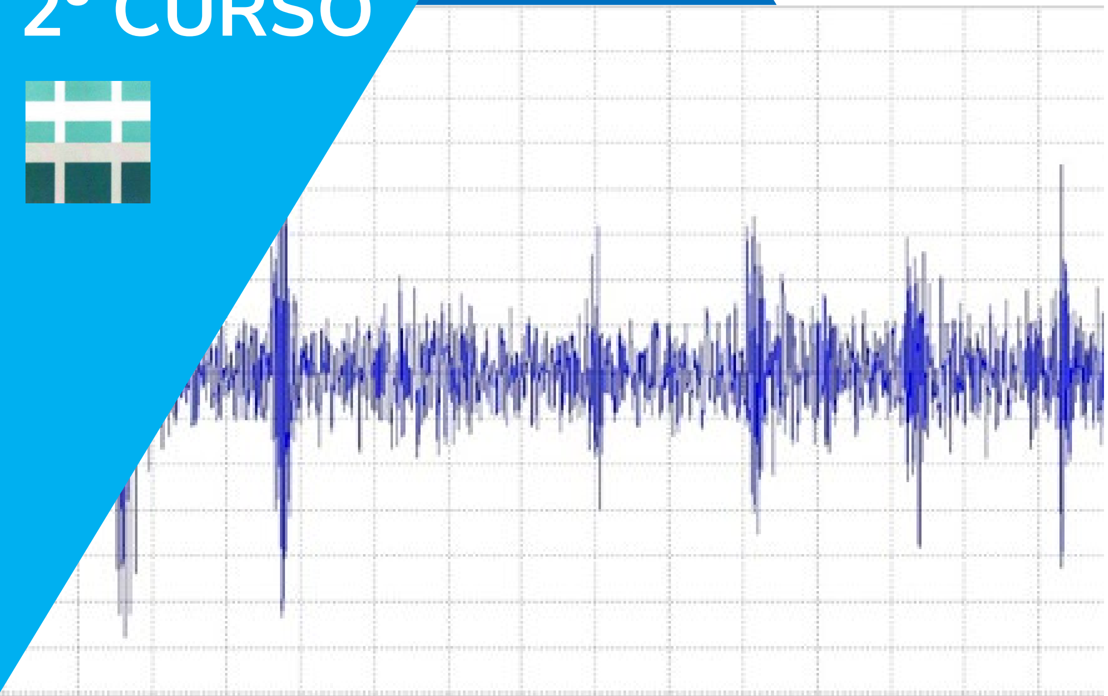
FÍSICA

2º CURSO

BLOQUE 3: ONDAS

06. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE



Se revisan los conceptos relativos a los movimiento oscilatorios y, en particular, a los movimientos vibratorios armónicos simples.

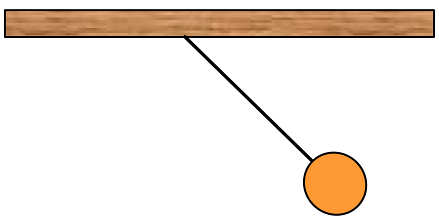
Rafael Artacho Cañadas

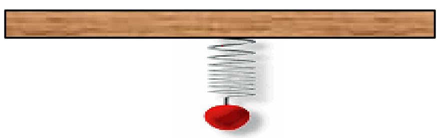
ÍNDICE

1. **Oscilaciones o vibraciones armónicas**
   - 1.1. ¿Por qué se producen los movimientos armónicos?
   - 1.2. ¿Cuándo decimos que un movimiento es armónico?
2. **El movimiento armónico simple**
   - 2.1. Formas de escribir la ecuación del movimiento armónico simple.
   - 2.2. Velocidad y aceleración en un movimiento armónico simple.
   - 2.3. Graficas de posición, velocidad y aceleración.
3. **Consideraciones dinámicas del MAS**
   - 3.1. Relación del período y la frecuencia con las características del oscilador.
4. **Consideraciones energéticas del MAS**
   - 4.1. Energía potencial elástica.
   - 4.2. Energía cinética.
   - 4.3. Energía mecánica.
5. **Relación entre el MCU y el MAS**
6. **Un ejemplo de oscilador: el péndulo simple**
7. **Oscilaciones forzadas. Resonancia**

- Un **movimiento periódico** es aquél que cada cierto tiempo se repite la misma posición del móvil (ej. Movimiento circular uniforme).

- Un **movimiento oscilatorio** o **vibratorio** es aquél en el que un móvil realiza movimientos de vaivén sobre la misma trayectoria (ej. péndulo o un cuerpo unido a un muelle).





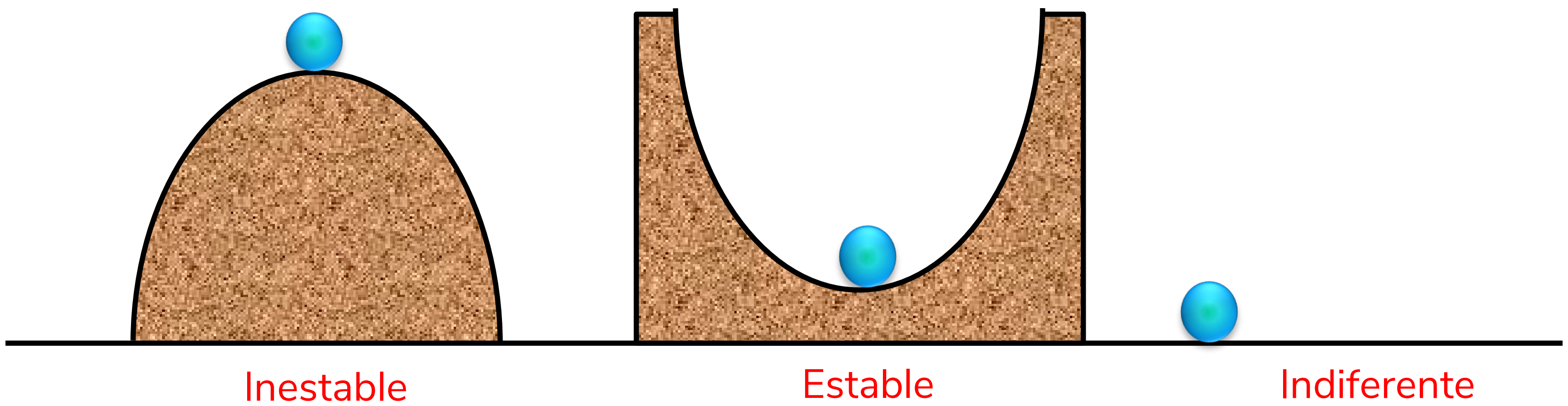
Período (**T**) es el tiempo que tarda en repetirse una posición dada, es decir, el que corresponde a una oscilación completa.

Frecuencia (**f**) es el número de oscilaciones por unidad de tiempo.

$$T = \frac{1}{f}$$

1.1. ¿Por qué se producen los movimientos oscilatorios?

Tipos de equilibrio

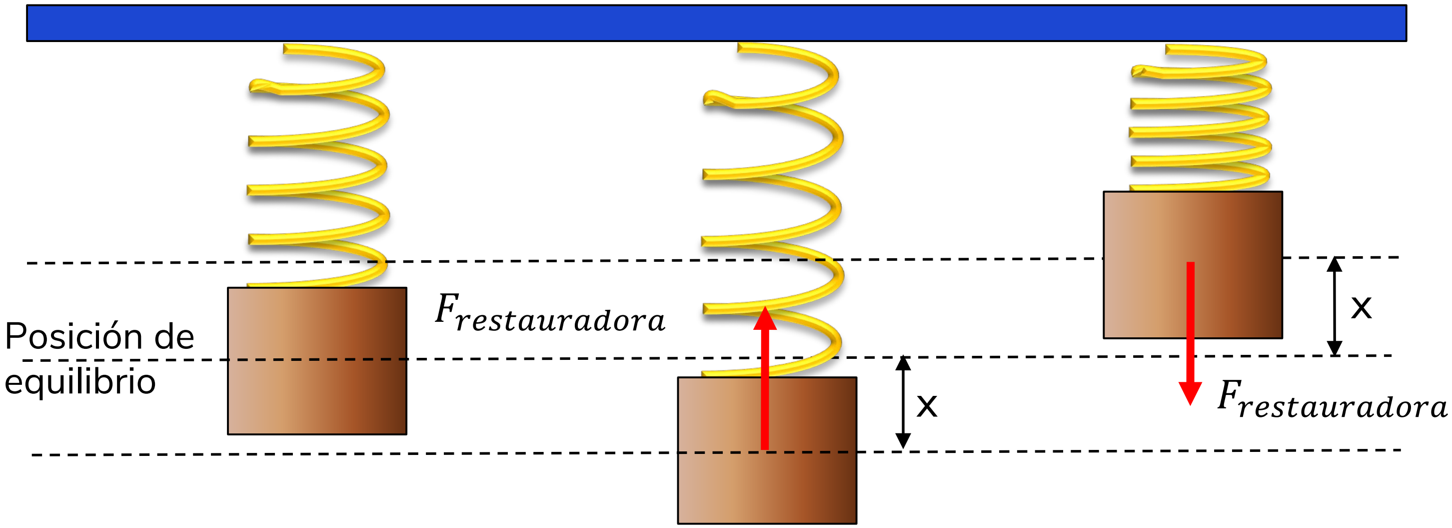


Cualquier sistema o cuerpo que sea apartado de su posición de **equilibrio estable** tenderá a recuperar el equilibrio efectuando un movimiento oscilatorio alrededor de dicha posición.

Las **oscilaciones son libres** si sobre el cuerpo no actúan fuerzas disipativas en cuyo caso oscilara indefinidamente.

Las **oscilaciones son amortiguadas** si sobre el cuerpo actúan fuerzas disipativas en cuyo caso el cuerpo acabará retornando al reposo en su posición de equilibrio estable.

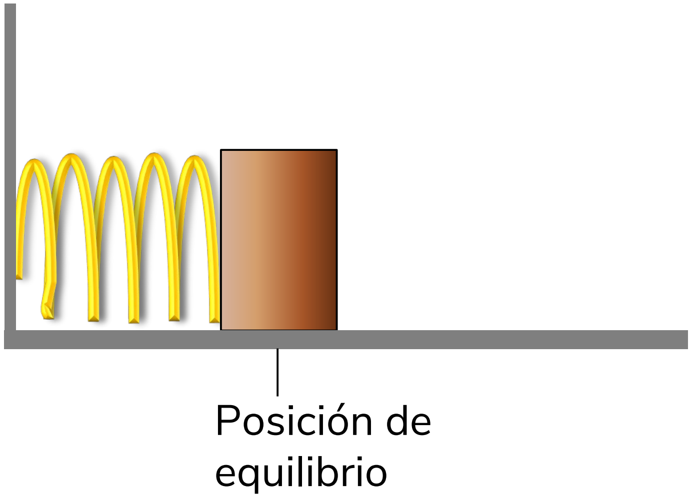
1.2. ¿Cuándo decimos que un movimiento es armónico?

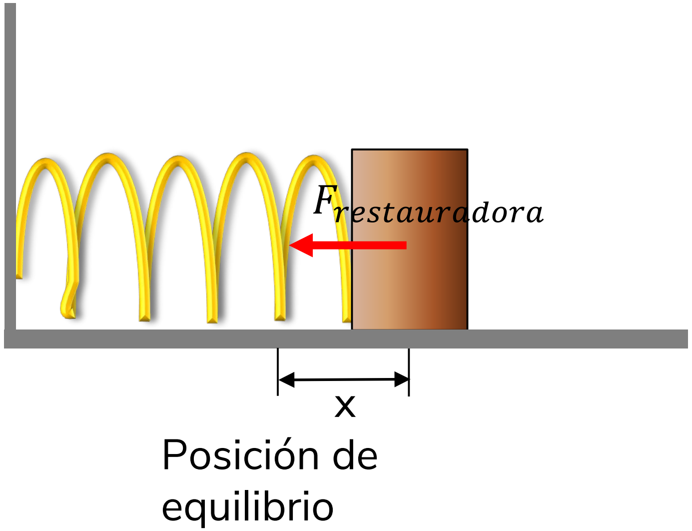


La fuerza restauradora obedece a la **ley de Hooke**: $F_{restauradora} = -kx$

- Una partícula tiene un **movimiento armónico simple (MAS)** cuando oscila bajo la acción de fuerzas restauradoras que son proporcionales a la distancia respecto de la posición de equilibrio.

- Un **oscilador armónico** es cualquier partícula o sistema con movimiento armónico simple.





La fuerza restauradora cumple también la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Ordenando los términos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Donde ω es la **pulsación angular**:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La ecuación del movimiento tiene dos soluciones:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \begin{cases} x(t) = Asen(\omega t + \delta) \\ x(t) = Acos(\omega t + \delta) \end{cases}$$

Representan un **movimiento armónico simple** (MAS)

Donde:

- **x** representa la posición del móvil que oscila armónicamente en función del tiempo, y se denomina **elongación**.
- **A** representa el máximo o mínimo valor posible de la elongación x. Por ese motivo, recibe el nombre de **elongación máxima** o **amplitud**.
- ω es la **frecuencia angular** y se relaciona con la frecuencia y el período de la manera que ya conocemos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

- (**ωt+δ**) se denomina **fase del movimiento**.
- δ es la llamada **constante de fase** o **fase inicial**. Su valor se calcula de modo que, al hacer t=0, se obtiene:

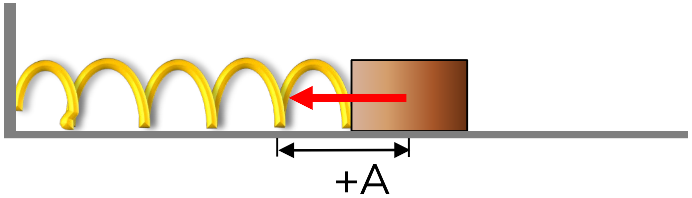
$$x_0 = Asen\delta \qquad \Longrightarrow \qquad sen\delta = \frac{x_0}{A}$$

2.1. Formas de escribir la ecuación de un movimiento armónico simple

Posición inicial $x_0 = +A$:

$$+A = Asen\delta \quad \Longrightarrow \quad sen\delta = 1 \quad \Longrightarrow \quad \delta = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = Asen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

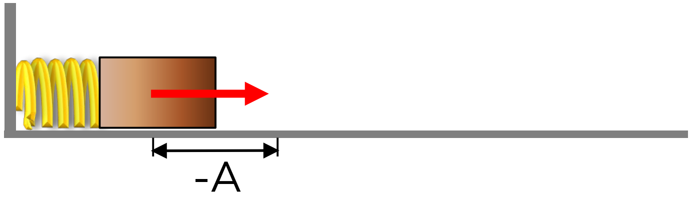
$$+A = Acos\delta \quad \Longrightarrow \quad cos\delta = 1 \quad \Longrightarrow \quad \delta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x(t) = Acos\omega t}$$



Posición inicial $x_0 = -A$:

$$-A = Asen\delta \quad \Longrightarrow \quad sen\delta = -1 \quad \Longrightarrow \quad \delta = -\frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = Asen\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

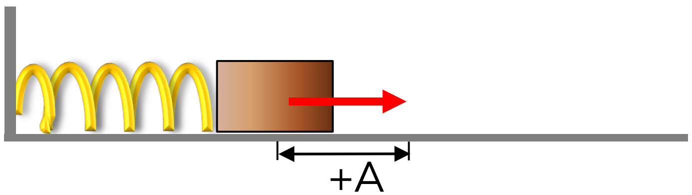
$$-A = Acos\delta \quad \Longrightarrow \quad cos\delta = -1 \quad \Longrightarrow \quad \delta = \pi \quad \Longrightarrow \quad x(t) = Acos(\omega t + \pi)$$



Posición inicial $x_0 = 0$ dirigiéndose a valores positivos:

$$0 = Asen\delta \quad \Longrightarrow \quad sen\delta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x(t) = Asen\omega t}$$

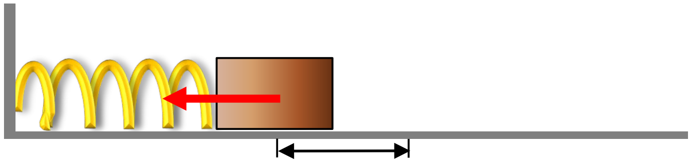
$$0 = Acos\delta \quad \Longrightarrow \quad cos\delta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta = -\frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Posición inicial $x_0 = 0$ dirigiéndose a valores negativos:

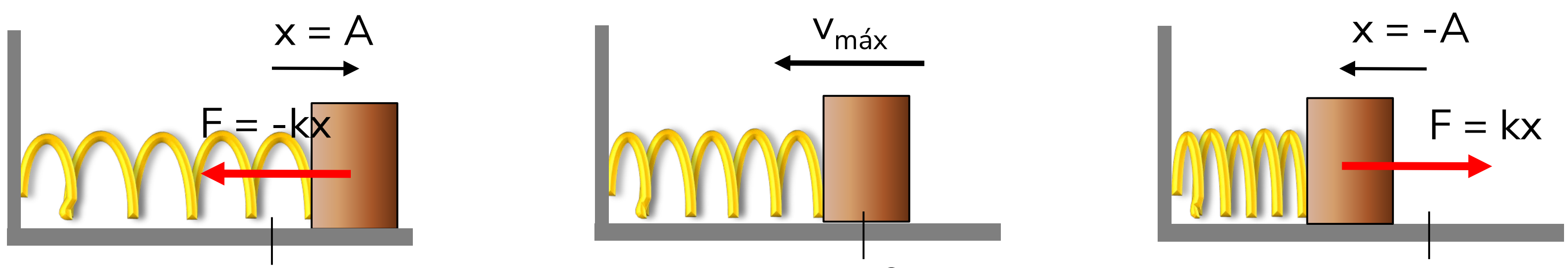
$$0 = Asen\delta \quad \Longrightarrow \quad sen\delta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta = \pi \quad \Longrightarrow \quad x(t) = Asen(\omega t + \pi)$$

$$0 = Acos\delta \quad \Longrightarrow \quad cos\delta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta = +\frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



2.2. Velocidad y aceleración en un movimiento armónico simple

Velocidad



v=0
$a_{máx}$ en sentido negativo

x=0
F=0
a=0

v=0
$a_{máx}$ en sentido positivo

$$x = Asen(\omega t + \delta) \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta) \qquad v_{máx} = A\omega$$

La **velocidad** en un MAS varía de manera armónica.

- En función de la posición:

$$v = A\omega\cos(\omega t + \delta) = A\omega\sqrt{1 - sen^2(\omega t + \delta)} = \pm\omega\sqrt{A^2 - A^2 sen^2(\omega t + \delta)}$$

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

- La velocidad es cero cuando x=A
- La velocidad es máxima cuando x=0

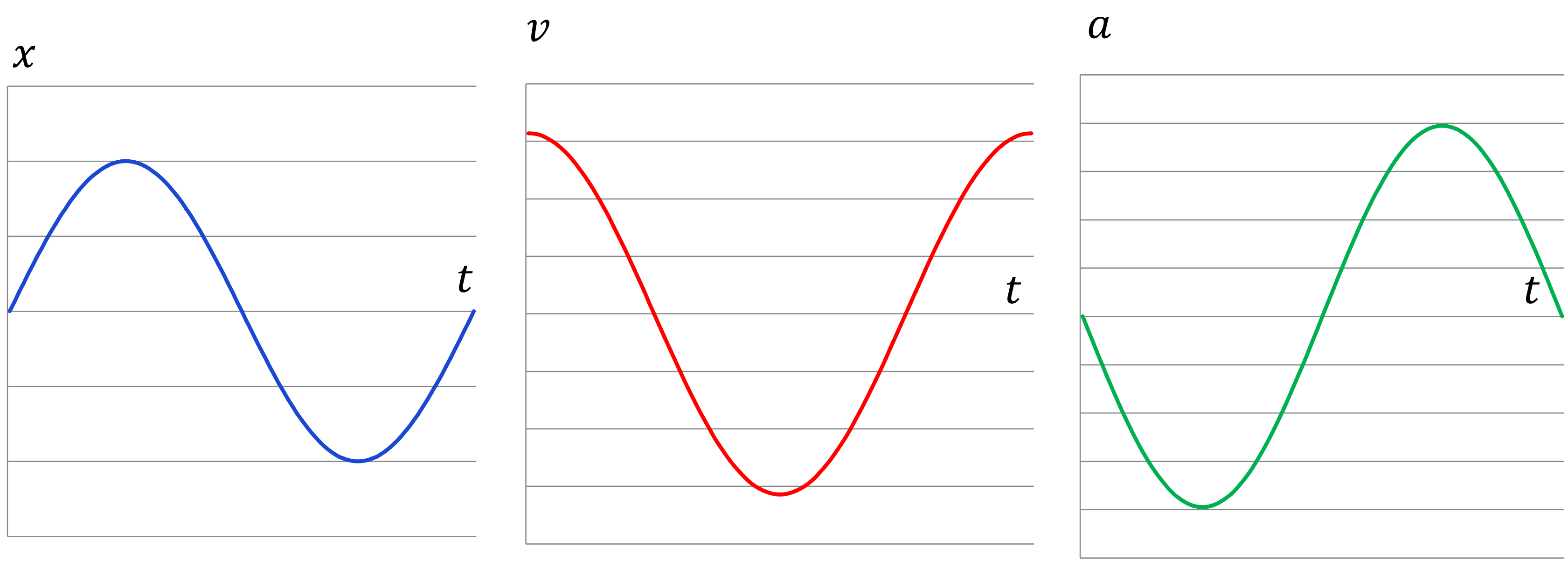
Aceleración

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \delta) = -\omega^2 x \qquad a_{máx} = \omega^2 A$$

La **aceleración** en un MAS es una función armónica que depende sinusoidalmente del tiempo.

- La aceleración es nula en la posición de equilibrio.
- La aceleración es máxima en los extremos, en cuyo caso vale $-\omega^2 A$.
- Su sentido es opuesto a la posición.

2.3. Gráficas de posición, velocidad y aceleración



- Las variaciones de la posición y la velocidad frente al tiempo tienen una diferencia de fase de $\pi/2$.
- Las variaciones de la posición y la aceleración frente al tiempo tienen una diferencia de fase de π.

ACTIVIDADES

1. La ecuación de la posición de un oscilador armónico viene dada en centímetros por la expresión: $x = 4{,}2\, cos4\pi t$. Determina: i) Su amplitud, su frecuencia angular, su período y su frecuencia; ii) Su constante de fase; iii) Su ecuación si el cuerpo se encontrara, inicialmente, a $2{,}1\ cm$ de su posición de equilibrio.
   Sol: i) $A = 4{,}2\ cm; \omega = 4\pi\ rad\ s^{-1}; T = 0{,}5\ s; f = 2\ Hz$; ii) $\delta = 0$; iii) $x = 4{,}2 \cos(4\pi t + \pi/3)$
2. Un cuerpo unido a un muelle comienza a oscilar horizontalmente desde su posición extrema, a $4\ cm$ de la posición de equilibrio, con un período de $0{,}3\ s$. Calcula: i) Su velocidad al pasar por la posición de equilibrio; ii) Su velocidad cuando $x = 2\ cm$; iii) La aceleración en los extremos, en $x = 2\ cm$, y en $x = -1\ cm$.
   Sol: i) $v = 0{,}838\ m\ s^{-1}$; ii) $v = 0{,}836\ m\ s^{-1}$; iii) $a(4) = \pm 17{,}55\ m\ s^{-2}$; $a(2) = \pm\ 8{,}77 m\ s^{-2}; a(-1) = 4{,}39\ m\ s^{-2}$
3. Representa las gráficas de posición, velocidad y aceleración frente al tiempo de un cuerpo unido a un muelle que comienza a oscilar horizontalmente desde un extremo situado a $5\ cm$ de la posición de equilibrio con una frecuencia de $5\ Hz$.

3.1. Relación del período y la frecuencia con las características del oscilador

- La pulsación angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Dado que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Longrightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

El **período** de un oscilador armónico depende de la masa del oscilador y de la constante restauradora del sistema, pero es independiente de la amplitud.

- Igualmente:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

ACTIVIDADES

4. Un oscilador consistente en una masa unida a un resorte horizontal de constante restauradora $k = 100\ N\ m^{-1}$ se mueve según la ecuación: $x = 6{,}5\ cos 5\pi t\ cm$. i) ¿Cuál es la masa del oscilador?; ii) ¿Cuál es la frecuencia del oscilador?; iii) ¿Cuál es la velocidad máxima de su movimiento?; iv) ¿Cuál es la velocidad cuando la elongación es igual a la mitad de la amplitud?; v) ¿Cuál es su aceleración máxima?
Sol: i) $m = 0{,}405\ kg$; ii) $f = 2{,}5\ Hz$; iii) $v_{máx} = 1{,}02\ m\ s^{-1}$; iv) $v = 0{,}88\ m\ s^{-1}$; v) $a_{máx} = 16{,}04\ m\ s^{-2}$

4.1. Energía potencial elástica

- Las fuerzas restauradoras que obedecen la ley de Hooke son conservativas, por tanto:

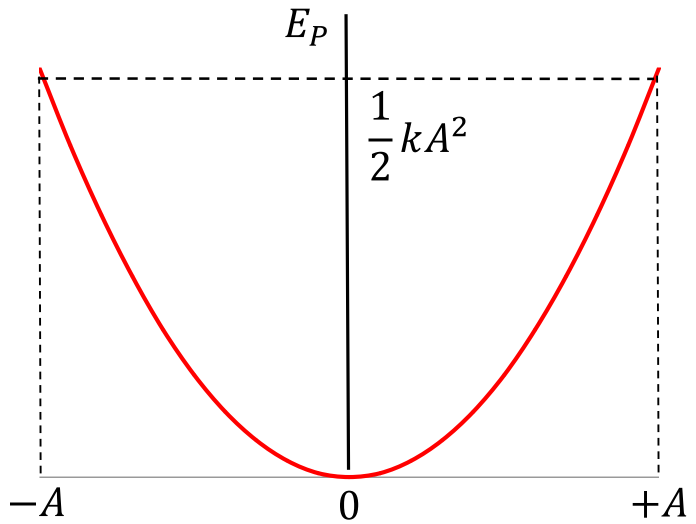
$$W = -\Delta E_P$$

- El trabajo que realiza la fuerza recuperadora de un resorte al desplazar un cuerpo unido a él, desde una posición x hasta la de equilibrio:

$$W = \int_x^0 -kx dx = -k\left[0 - \frac{x^2}{2}\right] = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{E_P = \frac{1}{2}kx^2}$$

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 sen^2(\omega t + \delta)$$

La **energía potencial** elástica de un oscilador armónico varía de forma periódica entre un valor mínimo en la posición de equilibrio ($E_P = 0$) y un valor máximo en los extremos ($E_P = 1/2kA^2$).



4.2. Energía cinética

- La energía cinética viene dada por:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2cos^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t + \delta)$$

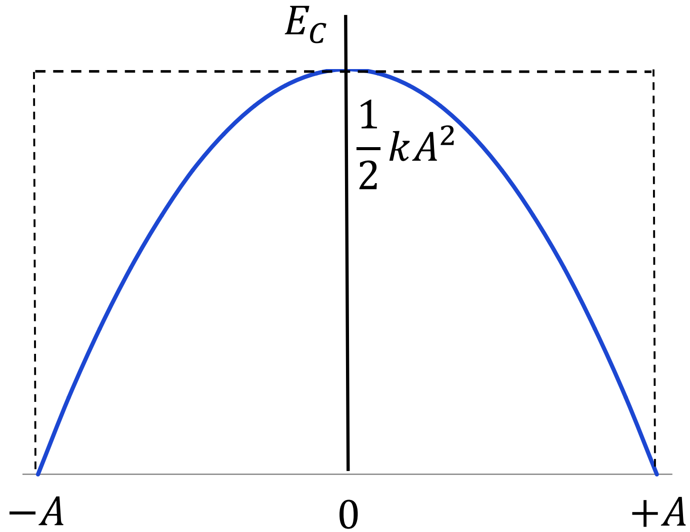
La **energía cinética** de un oscilador armónico varía de forma periódica entre un valor mínimo en los extremos ($E_C = 0$) y un valor máximo en la posición de equilibrio ($E_C = 1/2kA^2$).

- En función de la posición:

$$E_C = \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t + \delta) =$$

$$= \frac{1}{2}kA^2[1 - sen^2(\omega t + \delta)\ ]$$

$$E_C = \frac{1}{2}k[A^2 - x^2]$$



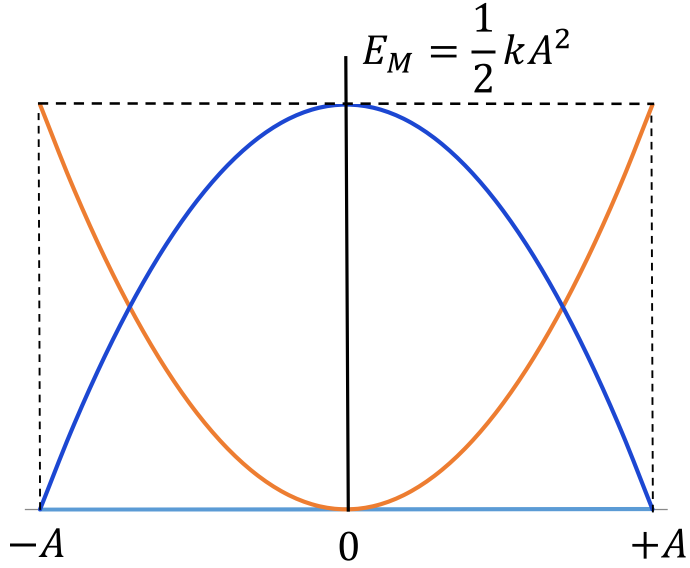
4.3. Energía mecánica

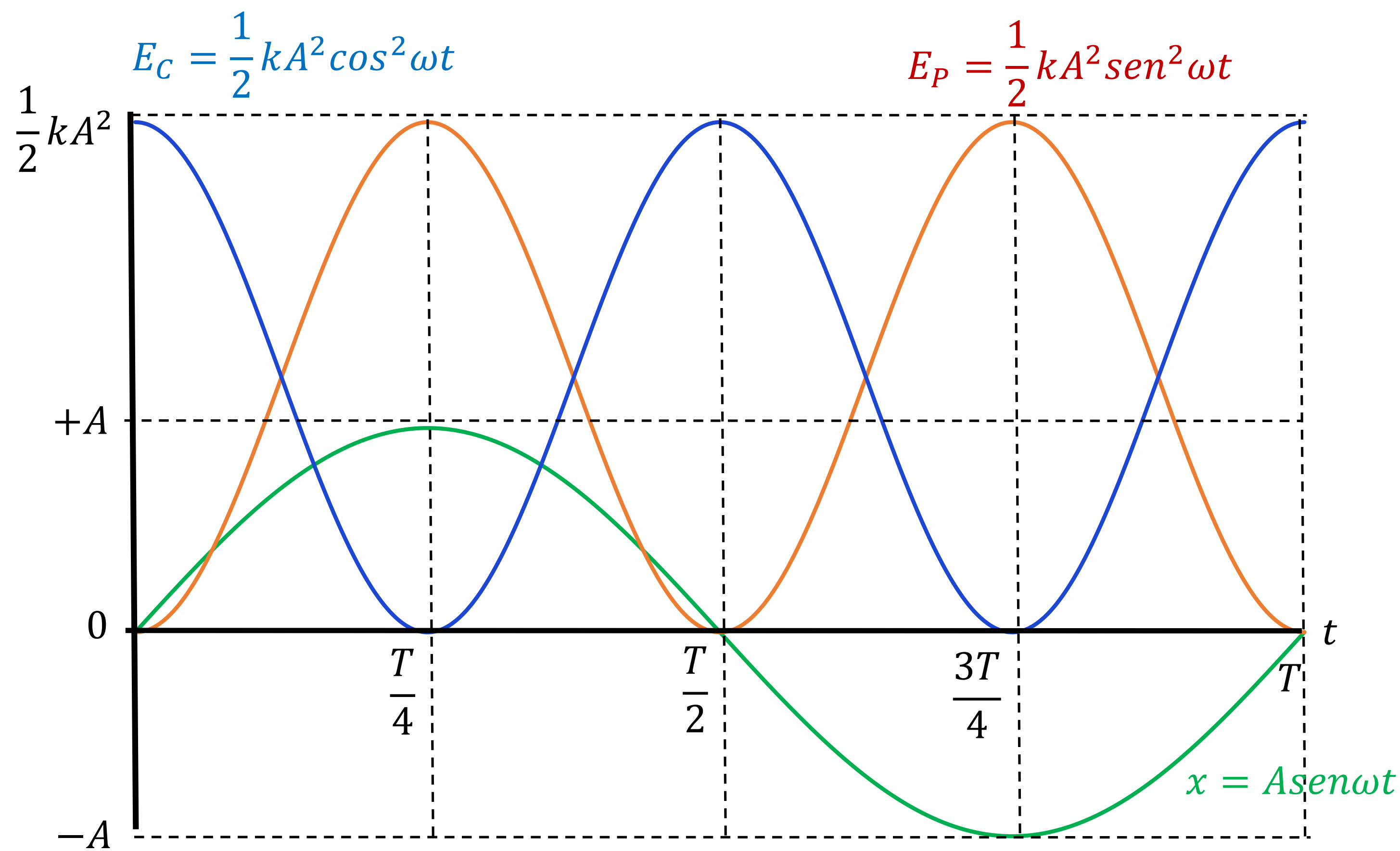
La energía mecánica será:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}kA^2[sen^2(\omega t + \delta) + cos^2(\omega t + \delta)]$$

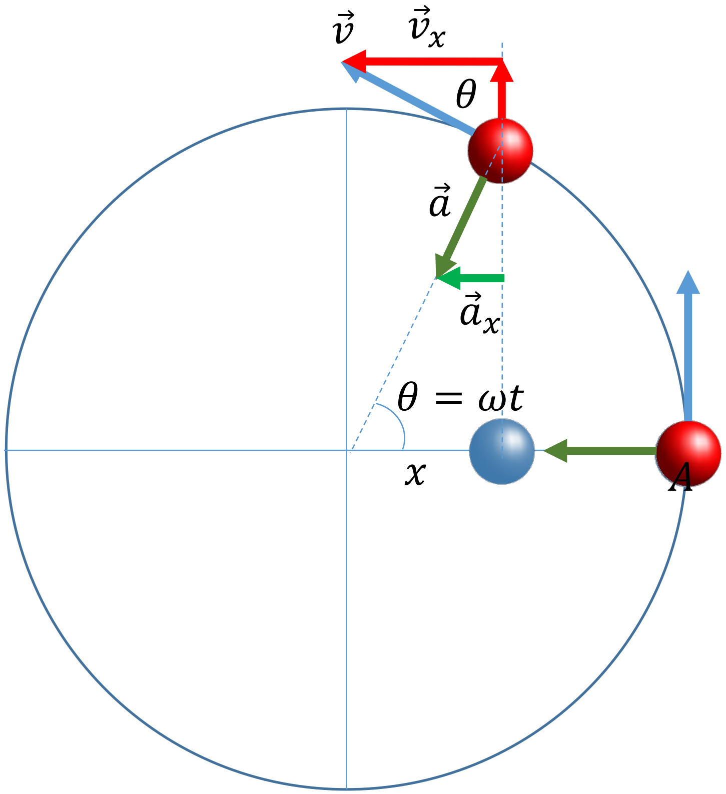
$$\boldsymbol{E_M = \frac{1}{2}kA^2}$$

La **energía mecánica** de un oscilador armónico permanece constante si no actúan fuerzas disipativas, y su valor es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud.




$E_C = \frac{1}{2}kA^2cos^2\omega t$
$E_P = \frac{1}{2}kA^2sen^2\omega t$
$\frac{1}{2}kA^2$
$+A$
0
$-A$
t
$\frac{T}{4}$
$\frac{T}{2}$
$\frac{3T}{4}$
T
$x = Asen\omega t$

5. Relación entre el MCU y el MAS

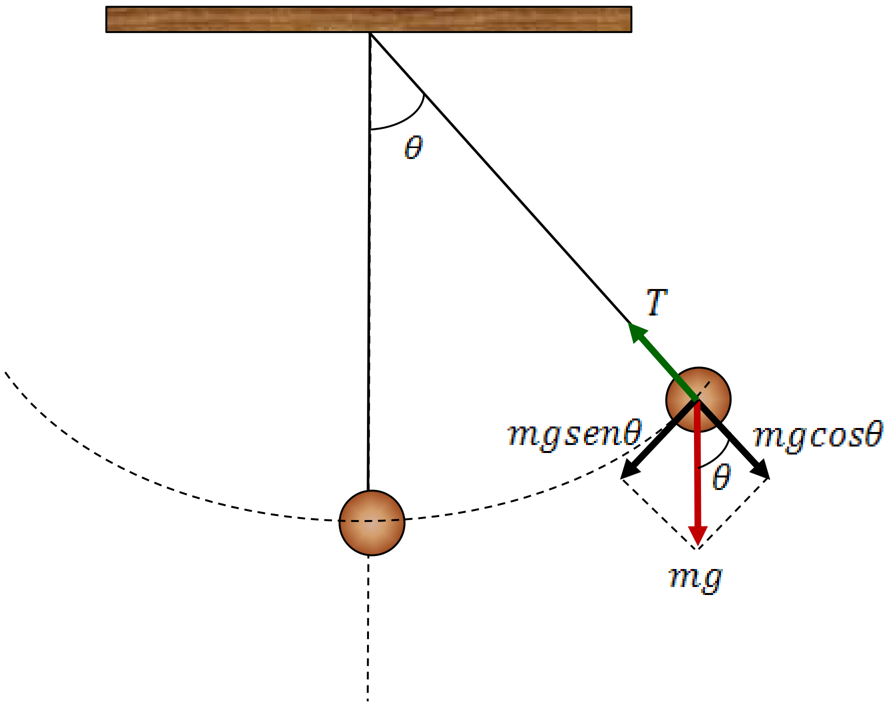


El MAS no es más que el resultado de observar movimientos circulares uniformes desde el propio plano del movimiento.

$$x = Acos\omega t$$

$$v_x = -vsen\theta = -A\omega sen\omega t$$

$$a_x = -asen\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -A\omega^2 cos\omega t$$



$$F = -mgsen\theta = ma_T = ml\alpha$$

$$-mgsen\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + gsen\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Si θ (en rad) es pequeño: $sen\theta \cong \theta$

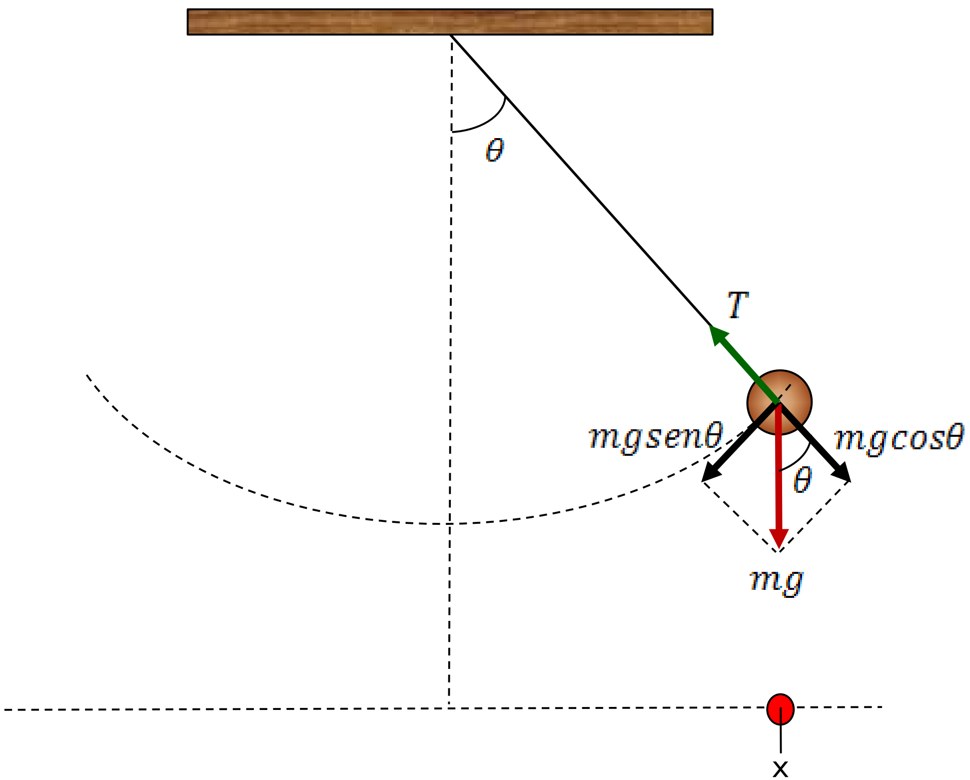
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad donde\ \omega^2 = \frac{g}{l}$$

Tiene como soluciones:

$$\begin{cases} \theta = \theta_{máx}sen(\omega t + \delta) \\ \theta = \theta_{máx}cos(\omega t + \delta) \end{cases}$$

Un péndulo simple puede considerarse como un oscilador armónico solo si oscila con amplitudes pequeñas.

6. Un ejemplo de oscilador: péndulo simple



Teniendo en cuenta que:

$$\begin{cases} sen\theta \approx \theta = \dfrac{x}{l} \\ sen\theta_{máx} \approx \theta_{máx} = \dfrac{A}{l} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = Asen(\omega t + \delta) \\ x = Acos(\omega t + \delta) \end{cases}$$

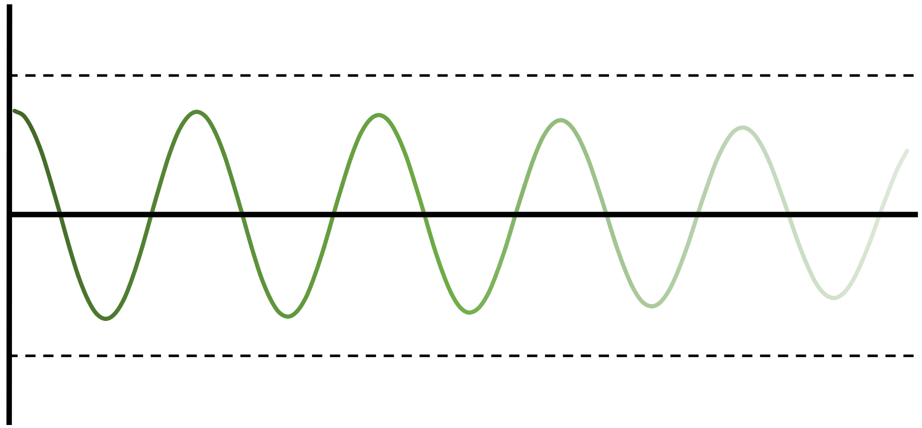
$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad \rightarrow \quad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l}$$

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

ACTIVIDADES

5. Un cuerpo de $1{,}4\ kg$ de masa se conecta a un muelle de constante elástica $15\ N\ m^{-1}$, y el sistema oscila en un plano horizontal sin rozamiento. La amplitud del movimiento es de $2{,}0\ cm$. Calcula: i) La energía total del sistema; ii) Las energías cinética y potencial cuando el desplazamiento del cuerpo es de $1{,}3\ cm$; iii) La velocidad máxima del cuerpo.
   Sol: i) $E = 3\ mJ$; ii) $E_P = 1{,}27\ \mathrm{m}J; E_C = 1{,}73\ mJ;\ \mathrm{iii})\ v_{máx} = 0{,}066\ m\ s^{-1}$

6. Sabiendo que el período de oscilación de un péndulo en la Tierra es de $1{,}5\ s$, determina: i) El período de oscilación en la Luna, donde $g_{Luna} = g_{Tierra}/6$; ii) La longitud de dicho péndulo.
   Dato: $g_{Tierra} = 9{,}8\ m\ s^{-2}$
   Sol: i) $T_{Luna} = 3{,}67\ s$; ii) $L = 56\ cm$

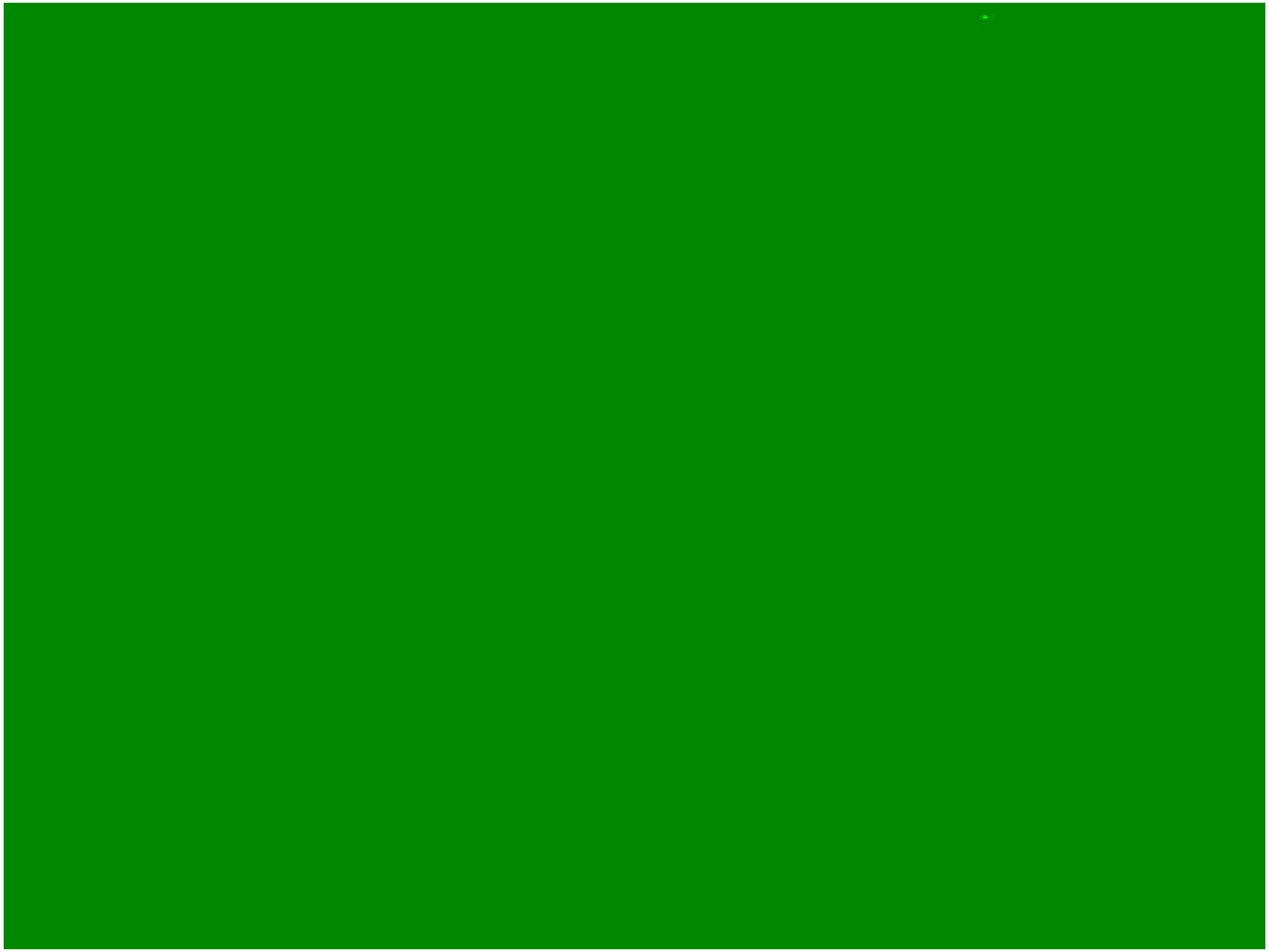


Las oscilaciones que tienen lugar bajo la acción de fuerzas periódicas externas se denominan **oscilaciones forzadas**.

$$F = F_{máx} cos\omega' t$$

Cuando la frecuencia angular de la fuerza, **ω'**, es igual a la frecuencia natural de oscilación del sistema, **ω**,se produce la **resonancia**. Esto supone un aumento de la amplitud de la oscilación.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Puente de Tacoma en el estado de Washington (1940)

Información de Contacto

Rafael Artacho Cañadas
Dpto. de Física y Química
I.E.S. Padre Manjón

Gonzalo Gallas, s/n
18003 · Granada

artacho1955@gmail.com