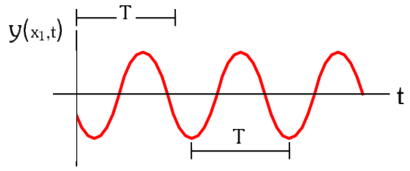
CUESTIONES Y PROBLEMAS SOBRE VIBRACIONES Y ONDAS

2022. Junio.

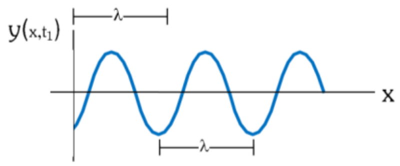
C.1. a) ¿Qué significa que una onda armónica es doblemente periódica? Explíquelo apoyándose en las gráficas correspondientes.
b) Una onda armónica transversal se propaga en el sentido negativo del eje OX con una velocidad de propagación de 3 m s^{-1}. Si su longitud de onda es de 1,5 m y su amplitud es de 2 m: i) Escriba la ecuación de la onda teniendo en cuenta que en el punto x = 0 m y en el instante t = 0 s la perturbación es nula y la velocidad de oscilación es positiva. ii) Determine la velocidad máxima de oscilación de un punto cualquiera del medio.

a) Se dice que las ondas armónicas son doblemente periódicas, ya que la oscilación de un punto del medio se repite:



Elongación de un punto x_1 del medio en función del tiempo.

- **En el tiempo**: Si estudiamos el movimiento de un punto del medio, pasado un tiempo igual al periodo (T), el estado se oscilación volverá a ser el mismo. T marca la periodicidad temporal.



Elongación de todos los puntos del medio para un instante dado de tiempo

- **En el espacio**: Si fijamos un instante de tiempo y estudiamos todos los puntos del medio, a una distancia igual a la longitud de onda (λ) encontramos un punto en fase con el primero, que se encuentra en el mismo estado de oscilación. λ marca la periodicidad espacial.

b) La expresión general de una onda armónica es $y_{(x,t)} = A\ sen\ (\omega t \pm kx + \varphi_0)$

Datos: Amplitud = A = 2 m

Longitud de onda $= \lambda = 1{,}5$ m → $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{4\pi}{3}\frac{rad}{m} = 4{,}19\ \frac{rad}{m}$

Velocidad de propagación = $v = 3$ m s^{-1} ; $v = \frac{\omega}{k}$ → $\omega = k \cdot v = 4\pi\ \frac{rad}{s} = 12{,}57\ \frac{rad}{s}$,

Sentido de propagación: negativo eje OX → ωt y kx aparecen <u>sumadas</u> en la función de onda.

La expresión de la onda, salvo la fase inicial, es $y_{(x,t)} = 2 \cdot sen(4\pi t + \frac{4\pi}{3}x + \varphi_0)$ (S.I.)

Calculamos la fase inicial: Para t = 0 s, la perturbación del punto x = 0 es nula. $y_{(0,0)} = 0$

Por tanto: $y_{(x,t)} = 2 \cdot sen(4\pi t + \frac{4\pi}{3}x + \varphi_0)$ → $0 = 2\cdot sen(\varphi_0)$ → $sen(\varphi_0) = 0$ → $\varphi_0 = 0, \pi, 2\pi...$ rad

La velocidad de oscilación: $v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left(2\cdot sen\left(4\pi t + \frac{4\pi}{3}x + \varphi_0\right)\right)}{dt} = 8\pi \cdot cos\left(4\pi t + \frac{4\pi}{3}x + \varphi_0\right)\ m\ s^{-1}$

Para x = 0m, t = 0s, $v_y = \frac{dy}{dt} = 8\pi \cdot cos(\varphi_0)$ Vemos que con $\varphi_0 = 0$ rad, la velocidad es positiva.

La expresión de la onda será $y_{(x,t)} = 2 \cdot sen\left(4\pi t + \frac{4\pi}{3}x\right)(S.I.)$

ii) La velocidad de oscilación de un punto:

$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left(2\cdot sen\left(4\pi t + \frac{4\pi}{3}x\right)\right)}{dt} = 8\pi \cdot cos\left(4\pi t + \frac{4\pi}{3}x\right)\ m\ s^{-1}$

El valor máximo se da cuando $cos\left(4\pi t + \frac{4\pi}{3}x\right) = \pm 1$

En valor absoluto, $v_{y m\acute{a}x} = 8\pi\ m\ s^{-1} = 25{,}13\ m\ s^{-1}$ *(también sería válido $\pm 25{,}13\ m\ s^{-1}$)*

(También puede calcularse directamente $v_{y m\acute{a}x} = A \cdot \omega = 2\ m \cdot 4\pi\ rad\ s^{-1} = 8\pi\ m\ s^{-1}$)

2021. Julio

C.1. a) i) Justifique que en una onda estacionaria la amplitud varía en cada punto. ii) Realice una representación gráfica de una onda estacionaria en función del espacio, y explique qué se entiende por un nodo en este tipo de ondas.

b) Una onda estacionaria queda descrita mediante la ecuación: y(x,t) = 0,5·sen((π/3)x)·cos(40πt) (S.I.)

Determine razonadamente: i) Amplitud, longitud de onda y velocidad de propagación de las ondas armónicas cuya superposición da lugar a esta onda estacionaria. ii) Posición de los vientres y amplitud de los mismos.

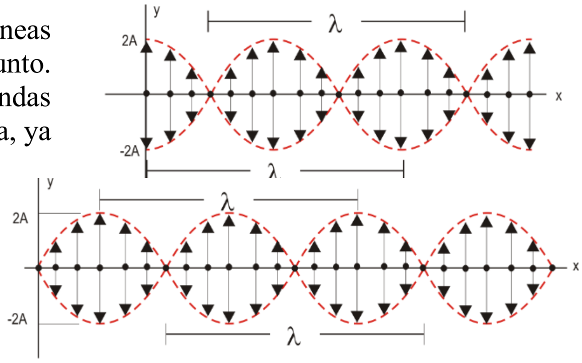
a) i) Una onda estacionaria consiste en la superposición (o interferencia) de dos ondas de las mismas características, que se propagan en la misma dirección, pero en sentidos opuestos. Como en toda interferencia, dependiendo de la diferencia de fase en que lleguen las ondas a cada punto, tendremos puntos con interferencia constructiva, en lo que la amplitud es máxima (suma de las amplitudes), puntos con interferencia destructiva, en los que la amplitud es mínima (nula, en este caso, ya que se restan dos amplitudes iguales) y puntos en los que la amplitud es intermedia entre estos dos valores extremos. Queda probada la variación de la amplitud en cada punto.

(De otra forma, a partir de la expresión de una onda estacionaria (puede ser de extremo libre o fijo, daría igual):

Por ej: y(x,t) = 2A senkx cosωt, donde la amplitud en cada punto es A(x) = 2A senkx, que depende del valor de x.)

ii) Cualquiera de estas dos representaciones valdría, las líneas discontinuas indican la amplitud que alcanza la oscilación en cada punto. Un nodo es un punto donde se da interferencia destructiva, las ondas interfieren en oposición de fase. La amplitud de la oscilación es nula, ya que se restan dos amplitudes iguales. Ese punto no oscila, está en reposo.

La posición de los nodos depende del tipo de onda estacionaria (extremo libre o fijo) y de la longitud de onda de las ondas viajeras que se superponen.



b) y(x,t) = 0,5·sen((π/3)x)·cos(40πt) (S.I.)

i) Se trata de una onda estacionaria (OE) de extremo fijo (nodo en x = 0 m)

La expresión general de una OE de este tipo es y(x,t) = 2A·sen(kx)·cos(ωt) (S.I.), donde A, k , ω, son magnitudes correspondientes a las ondas armónicas superpuestas.

Comparando ambas expresiones:

Amplitud de las ondas armónicas: 2A = 0,5 m → A = 0,25 m

Número de onda: $k = \pi/3 \text{ rad m}^{-1}$ → Longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 6\,m$

Frecuencia angular: $\omega = 40\pi \text{ rad s}^{-1}$

Velocidad de propagación de las ondas armónicas: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{40\pi\, rad \cdot s^{-1}}{\frac{\pi}{3} rad \cdot m^{-1}} = 120\, m \cdot s^{-1}$

ii) Un vientre de una onda estacionaria es un punto de amplitud máxima (interferencia constructiva)

Posición de los vientres:

A(x) máxima → 0,5·sen((π/3)x) máxima → sen((π/3)x) = ±1 → $\frac{\pi}{3}x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n\epsilon\mathbb{N}$ → $x = \frac{3}{2} + n \quad n\epsilon\mathbb{N}$

x = 1,5 m, 4,5 m, 7,5 m …

Como hemos comentado, en un vientre se da interferencia constructiva y la amplitud es máxima $A_{vientre} = 2A = 0,5$ m

Julio 2020. 7

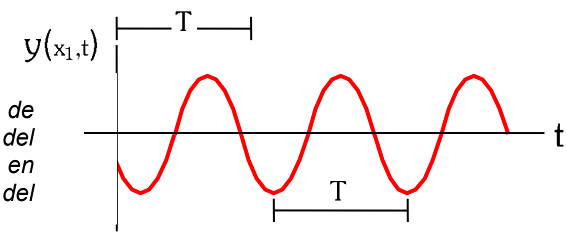
7. a) ¿Qué significa que una onda armónica viajera tenga doble periodicidad? Realice las gráficas necesarias para representar ambas periodicidades.
b) Una onda viajera viene dada por la ecuación: y (x,t) = 20 cos (10 t – 50 x) (S.I.)
Calcule: i) Su velocidad de propagación. ii) La ecuación de la velocidad de oscilación y su valor máximo. iii) La ecuación de la aceleración y su valor máximo.

a)

Se dice que las ondas armónicas son doblemente periódicas, ya que la oscilación de un punto del medio se repite:

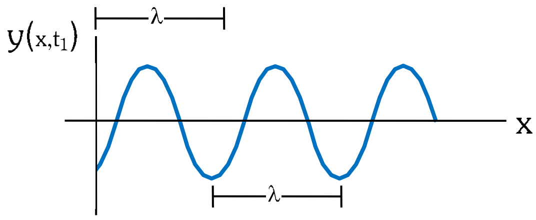
- En el tiempo: Pasado un tiempo igual al periodo (T), el estado se oscilación volverá a ser el mismo. T marca la periodicidad temporal.

Elongación de un punto x del medio en función del tiempo.



- En el espacio: A una distancia igual a la longitud de onda (λ) encontramos un punto en fase con el primero, que se encuentra en el mismo estado de oscilación. λ marca la periodicidad espacial.

Ambas periodicidades están relacionadas a través de la velocidad de propagación: $\lambda = v \cdot T$



Elongación de todos los puntos del medio para un instante dado de tiempo

b)

La expresión general de una onda viajera es $y(x,t) = A \cdot sen(\omega \cdot t \pm k \cdot x + \varphi_0)$. Comparando con la expresión del enunciado obtenemos que:

Amplitud: A = 20 m (habla de oscilación más adelante, suponemos que la perturbación es una distancia)

Frecuencia angular: $\omega = 10$ rad/s

Número de onda: $k = 5$ rad/m

Fase inicial: $\varphi_0 = 0$ rad

Se propaga en el sentido positivo del eje x, ya que $\omega \cdot t$ y $k \cdot x$ aparecen restadas en la fase.

i) La velocidad de propagación es la velocidad a la que se transmite la energía de la vibración por el medio. Para cada tipo de onda es una constante que sólo depende del medio. Con los datos que nos da el enunciado se calcula directamente a partir de: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{10 \text{ rad/s}}{50 \text{ rad/m}} = 0{,}2\ m\ s^{-1}$

(Podría calcularse también la longitud de onda a partir de k, y el periodo a partir de ω, y luego aplicar $\lambda = v \cdot T$)

ii) La velocidad de oscilación (o de vibración) de los puntos del medio se calcula

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(20 \cdot \cos(10t - 50x))}{dt} = -200 \cdot sen(10t - 50x)\ m\ s^{-1}$$

El valor máximo se da cuando $sen(10t - 50x) = \pm 1$

En valor absoluto, $v_{ymax} = 200\ m\ s^{-1}$ *(también sería válido $\pm 200\ m\ s^{-1}$)*

ii) La aceleración de oscilación (o de vibración) de los puntos del medio se calcula

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(-200 \cdot \text{sen}(10t - 50x))}{dt} = -2000 \cdot cos(10t - 50x)\ m\ s^{-1}$$

El valor máximo se da cuando $cos(10t - 50x) = \pm 1$

En valor absoluto, $a_{ymax} = 2000\ m\ s^{-2}$ *(también sería válido $\pm 2000\ m\ s^{-2}$)*

(Vemos que se cumple la relación $a_y = -\omega^2 \cdot y$)

Junio 2019. B. 3

3. a) Explique las diferencias entre ondas armónicas y ondas estacionarias. Escriba un ejemplo de cada tipo de ondas.

b) Una onda transversal, que se propaga en sentido negativo del eje OX, tiene una amplitud de 2 m, una longitud de onda de 12 m y la velocidad de propagación es 3 m s^{-1}. Escriba la ecuación de onda sabiendo que la perturbación, y(x,t), toma el valor máximo en el punto x = 0 m, en el instante t = 0 s.

a)

- Una onda armónica (viajera, O.V) consiste en la propagación de una perturbación por un medio, mientras que una onda estacionaria (O.E) es un caso de interferencia entre dos ondas con las mismas características, que se propagan en sentidos opuestos.
- Las ondas armónicas (viajeras) propagan energía en un determinado sentido (+ o -), con una velocidad de propagación $v = \frac{\omega}{k}$, mientras que la velocidad de propagación de una onda estacionaria es nula, no hay propagación neta de energía.
- En una onda viajera, los puntos del medio vibran todos con la misma amplitud A, pero desfasados, mientras que en una onda estacionaria la amplitud de vibración depende de la posición ($A_{(x)} = 2A \cos kx$, por ejemplo), dando lugar a nodos y vientres. Todos los puntos de la OE vibran en fase.
- Matemáticamente tienen expresiones diferentes: En las ondas armónicas las partes espacial y temporal están unidas en la misma función trigonométrica ($y_{(x,t)} = A\ sen\ (\omega t \pm kx + \varphi_0)$), mientras que en las ondas estacionarias están separadas en dos funciones trigonométricas multiplicadas. (p.e. $y_{(x,t)} = 2A\ cos kx \cdot sen \omega t$)

Ejemplos de ondas armónicas: sonido, luz, ondas sísmicas…

Ejemplos de ondas estacionarias: cuerda de guitarra al pulsarla, flauta, tambor, saltar a la comba…

b) La expresión general de una onda armónica es $y_{(x,t)} = A\ sen\ (\omega t \pm kx + \varphi_0)$

Datos: Amplitud = A = 2 m

Longitud de onda = λ = 12 m → $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}524\ \frac{rad}{m}$

Velocidad de propagación = v = 3 m s^{-1} ; $v = \frac{\omega}{k}$ → $\omega = v \cdot k = 1{,}572\ \frac{rad}{s}$,

Sentido de propagación: negativo eje OX → ωt y kx aparecen <u>sumadas</u> en la función de onda.

Calculamos la fase inicial: Para t = 0 s, la perturbación del punto x = 0 es igual a la amplitud. $y_{(0,0)} = A$

Por tanto: $y_{(0,0)} = A\ sen\ (\omega \cdot 0 + k \cdot 0 + \varphi_0) = A$ → $A = A \cdot sen(\varphi_0)$ → $sen(\varphi_0) = 1$ → $\varphi_0 = \pi/2$

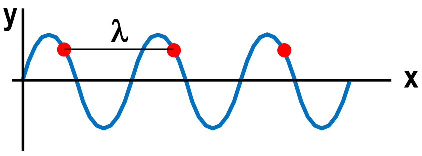
La expresión de la onda será $y_{(x,t)} = 2\ sen\ (1{,}572 \cdot t + 0{,}524 \cdot x + \pi/2)$ m

Junio 2018. A. 3

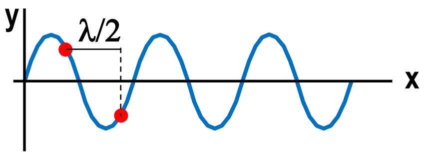
3. a) ¿Qué significa que dos puntos de la dirección de propagación de una onda armónica estén en fase o en oposición de fase? ¿Qué distancia les separaría en cada caso?
b) Una onda armónica de amplitud 0,3 m se propaga hacia la derecha por una cuerda con una velocidad de 2 m s^{-1} y un periodo de 0,125 s. Determine la ecuación de la onda correspondiente sabiendo que el punto x = 0 m de la cuerda se encuentra a la máxima altura para el instante inicial, justificando las respuestas.

a) La expresión general de una onda armónica es $y(x,t)= A\cdot \text{sen}(\omega t \pm kx+\varphi_0)$ (o $y(x,t)= A\cdot \cos(\omega t \pm kx+\varphi_0)$)
La fase ($\varphi=\omega t \pm kx+\varphi_0$) de una onda armónica nos indica el estado de vibración de un punto del medio en un instante determinado.
Dos puntos en fase tienen el mismo estado de vibración (igual elongación, igual velocidad y aceleración), y están desfasados uno respecto del otro $2n\pi$ rad, siendo n = 1,2,3… de manera que senφ (o cosφ) tomaría el mismo valor para ambos puntos. Como consecuencia, dos puntos en fase están separados una distancia igual a un nº entero de veces la longitud de onda. : $n\cdot\lambda$ (n=1,2,3…)

Dos puntos en oposición de fase tienen estados de vibración opuestos (mismos valores absolutos de elongación, velocidad y aceleración, pero signos opuestos), y están desfasados $(2n-1)\pi$ rad (n=1,2,3…) . La distancia que los separa es de un número impar de veces la mitad de la longitud de onda: $(2n+1)\lambda/2$ (n=1,2,3…)



Puntos en fase



Puntos en oposición de fase

b) La expresión general de una onda armónica es $y(x,t)= A\cdot \text{sen}(\omega t \pm kx+\varphi_0)$

Datos: Amplitud: $A = 0{,}3$ m

Periodo: $T = 0{,}125$ s Frecuencia angular: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 16\pi \, \frac{rad}{s}$

Número de onda: $k = \frac{\omega}{v} = \frac{16\pi \, rad/s}{2 \, m/s} = 8\pi \, \frac{rad}{m}$ (también $\lambda = v \cdot T$ y luego $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

Fase inicial: Para x=0 y t=0 → y = A sustituimos $A = A\,\text{sen}\varphi_0$ → $\text{sen}\varphi_0 = 1$ → $\varphi_0 = \pi/2$

Como se propaga hacia la derecha (sentido positivo del eje x), las partes temporal y espacial de la fase aparecen restadas.

La ecuación de la onda es $y(x,t)= 0{,}3\cdot \text{sen}(16\pi t - 8\pi x + \pi/2)$ m

(Si la ecuación la hubiéramos expresado con coseno, la fase inicial sería nula $y(x,t)= 0{,}3\cdot \cos(16\pi t - 8\pi x)$ m

Junio 2016. A. 2

2. a) Explique las características cinemáticas de un movimiento armónico simple.
b) Dos partículas de igual masa m, unidas a dos resortes de constantes K_1 y K_2 ($K_1>K_2$), describen movimientos armónicos simples de igual amplitud. ¿Cuál de las dos partículas tiene mayor energía cinética al pasar por su posición de equilibrio? ¿Cuál de las dos oscila con mayor periodo? Razone las respuestas

a) En esta cuestión (a mi juicio bastante larga para ser sólo un apartado) pueden tratarse muchos aspectos. Creo que al menos habría que hablar sobre:

- Definición de movimiento armónico simple (m.a.s.)
- Ecuación de movimiento $y(t) = A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)$
- Magnitudes cinemáticas del m.a.s: Periodo, frecuencia, fase, fase inicial, velocidad de vibración, aceleración de vibración. Definición, fórmula y unidades
- Relación entre elongación y aceleración (ecuación fundamental del m.a.s) $a_y = -\omega^2 \cdot y$
- Dibujar algunas gráficas.

b) En la situación que nos dice el enunciado (masa unida a un resorte horizontal sin rozamiento), la única fuerza que interviene en el movimiento es la fuerza elástica del resorte, ya que la fuerza gravitatoria y la normal se anulan mutuamente.

Al ser todo el movimiento en horizontal, podemos obviar la energía potencial gravitatoria, eligiendo el nivel cero de potencial gravitatorio a la altura a la que se encuentran los bloques y los resortes. Las únicas energías presentes serán la cinética ($Ec = \frac{1}{2} m v_y^2$) y la potencial elástica ($Ep_{el} = \frac{1}{2} K y^2$), manteniéndose constante la energía mecánica ($E_M = Ec + Ep_{el} = \frac{1}{2} K A^2$), ya que la fuerza elástica es conservativa.

m: masa de la partícula K: constante elástica del muelle.
y: elongación, la distancia a la posición de equilibrio (también suele expresarse como x) .
v_y : velocidad de vibración.
A: Amplitud, elongación máxima.

Cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio, su energía potencial es cero y su energía cinética es máxima, coincidiendo en ese momento con la energía mecánica. Así que $Ec_{max} = \frac{1}{2} K A^2$

Como ambos m.a.s tienen igual amplitud, vemos que <u>tendrá mayor energía cinética máxima la partícula 1, ya que está unida a un resorte de mayor constante elástica</u>.

El periodo de oscilación de un m.a.s. (tiempo en realizar una oscilación completa) depende de las características propias del sistema (de K y m en este caso). Viene dado por $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$

Como ambas partículas tienen la misma masa, <u>oscilará con mayor periodo la partícula 2, ya que está unida al muelle de menor constante elástica</u>.

Junio 2015. A. 2

2. a) Explique las características cinemáticas del movimiento armónico simple.
b) Dos bloques, de masas M y m, están unidos al extremo libre de sendos resortes idénticos, fijos por el otro extremo a una pared, y descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Los bloques se separan de su posición de equilibrio una misma distancia A y se sueltan. Razone qué relación existe entre las energías potenciales cuando ambos bloques se encuentran a la misma distancia de sus puntos de equilibrio.

a) En esta cuestión (a mi juicio bastante larga para ser sólo un apartado) pueden tratarse muchos aspectos. Creo que al menos habría que hablar sobre:

- Definición de movimiento armónico simple (m.a.s.)
- Ecuación de movimiento $y(t) = A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)$
- Magnitudes cinemáticas del m.a.s: Periodo, frecuencia, fase, fase inicial, velocidad de vibración, aceleración de vibración. Definición, fórmula y unidades
- Relación entre elongación y aceleración (ecuación fundamental del m.a.s) $a_y = -\omega^2 \cdot y$
- Dibujar algunas gráficas.

b) En la situación que nos dice el enunciado (masa unida a un resorte horizontal sin rozamiento), la única fuerza que interviene en el movimiento es la fuerza elástica del resorte, ya que la fuerza gravitatoria y la normal se anulan mutuamente.
Al ser todo el movimiento en horizontal, podemos obviar la energía potencial gravitatoria, eligiendo el nivel cero de potencial gravitatorio a la altura a la que se encuentran los bloques y los resortes.
La energía potencial será entonces energía potencial elástica, dada por $Ep_{el} = \frac{1}{2} K\, y^2$ donde
K es la constante elástica del resorte (e independiente de la masa)
y es la elongación, la distancia a la posición de equilibrio.

Teniendo en cuenta esto, si ambos resortes son idénticos y las masas están a la misma distancia de sus respectivas posiciones de equilibrio, la energía potencial es independiente de la masa de la partícula, por lo que tendrán idéntica energía potencial.

Junio 2014. B. 4

4. La energía mecánica de una partícula que realiza un movimiento armónico simple a lo largo del eje X y en torno al origen vale 3 ·10^{-5} J y la fuerza máxima que actúa sobre ella es de 1,5 · 10^{-3} N.
a) Obtenga la amplitud del movimiento.
b) Si el periodo de oscilación es de 2 s y en el instante inicial la partícula se encuentra en la posición x_0 = 2 cm, escriba la ecuación de movimiento.

Nos encontramos ante una partícula que describe un m.a.s. (movimiento armónico simple, movimiento oscilatorio periódico en el que la aceleración es proporcional y de signo contrario a la distancia a la posición de equilibrio, o elongación)

a) La fuerza (o fuerzas) que originan un m.a.s. pueden ser de naturaleza muy variada (un cuerpo unido a un muelle, un péndulo con oscilaciones suficientemente pequeñas, un corcho que flota en el agua, los electrones en una corriente alterna...), pero matemáticamente todos pueden estudiarse como si se tratara de una fuerza elástica que actúa sobre el cuerpo (fuerza proporcional a la elongación y de sentido contrario). De este modo:

La fuerza elástica viene dada por $\vec{F}_{el} = -K \cdot \vec{x}$ en módulo $F_{el} = K \cdot x$, siendo K la constante elástica y x la elongación. *(también podríamos llamar "y" a la elongación, pero hay que especificarlo claramente)*

La fuerza máxima (en valor absoluto) se ejerce cuando la elongación es máxima (x = A, amplitud)

$F_{elMAX} = K \cdot A$

La energía mecánica del m.a.s. puede calcularse como la energía potencial elástica máxima (en ese momento su Ec es nula) cuando alcanza la máxima elongación

$E_M = \frac{1}{2} K A^2$ donde K es la constante elástica y A la amplitud del m.a.s.

Con los datos que nos dan, tenemosun sitema de dos ecuaciones con el que calculamos A y K

$$F_{elMAX} = K \cdot A \quad \rightarrow \quad 1{,}5 \cdot 10^{-3}\, N = K \cdot A$$
$$E_M = \tfrac{1}{2} K A^2 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot 10^{-5}\, J = 0{,}5 \cdot K \cdot A^2$$

dividimos ambas expresiones (la 2ª entre la 1ª)

$$\frac{3 \cdot 10^{-5}}{1{,}5 \cdot 10^{-3}} = \frac{0{,}5 \cdot K \cdot A^2}{K \cdot A} \quad \rightarrow \quad 0{,}02 = 0{,}5 \cdot A \quad \rightarrow \quad A = 0{,}04\, m = 4\, cm$$

b) La ecuación de movimiento de un m.a.s. que oscila a lo largo del eje x, viene dada por

$x(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$ donde

x(t) es la elongación (distancia a la posición de equilibrio, tomada como punto de referencia) en cualquier instante.
A es la elongación máxima en valor absoluto.

ω es la frecuencia angular de oscilación. $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

y φ_0 es la fase inicial, que indica el estado del movimiento para t = 0 s. $x(0) = A \cdot sen\varphi_0$

La amplitud está calculada en el apartado anterior. A = 0,04 m

A partir del periodo, calculamos la frecuencia angular $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi\, rad}{2\, s} = 3{,}14\, rad\, s^{-1}$

Y la fase inicial a partir de la posición inicial de la partícula

$$x(0) = A \cdot sen\varphi_0 \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = arsen\left(\frac{x(0)}{A}\right) = arsen\left(\frac{0{,}02\, m}{0{,}04\, m}\right) = arsen(0{,}5) = 0{,}5236 rad = \pi / 6 rad$$

Así, la ecuación de movimiento queda $x(t) = 0{,}04 \cdot sen(3{,}14 \cdot t + \frac{\pi}{6})\, m$

Junio 2013. A.2

2. a) Explique el significado de las magnitudes que aparecen en la ecuación de un movimiento armónico simple e indique cuáles son sus respectivas unidades en el Sistema Internacional.
b) Demuestre que en un oscilador armónico simple la aceleración es proporcional al desplazamiento de la posición de equilibrio pero de sentido contrario.

a) La posición de un móvil que describe un m.a.s viene dada por una ecuación del tipo

$y = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$ o $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$ donde:

y — Elongación. Es la posición del móvil respecto al punto de referencia, que se escoge siempre en su posición de equilibrio. Indica el desplazamiento desde dicha posición de equilibrio. Aunque usemos la letra "y", se refiere a cualquier coordenada espacial (x, y, z) en la que se mueva. [y]= m (S.I.)

A — Amplitud del m.a.s. Es el valor máximo de la elongación (en valor absoluto). El m.a.s. alcanzará los valores de A y –A en los extremos de su movimiento. [A] = m (S.I.)

ω — Frecuencia angular. Indica el ritmo de oscilación (algo análogo a la velocidad angular en un movimiento circular). [ω] = rad s^{-1} (S.I.). A partir de ω podemos obtener

T — Periodo de oscilación. Tiempo que tarda el móvil en realizar una oscilación completa. Se calcula como

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad [T]= s \ (S.I.)$$

f — Frecuencia. Número de oscilaciones descritas en la unidad de tiempo. Es la inversa del periodo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad [f]= \text{ciclos/s} = s^{-1} = \text{Hz (Hertzio)} \quad (S.I.)$$

$\varphi = (\omega \cdot t + \varphi_0)$ — Fase. Es un ángulo que nos indica en qué estado de oscilación se encuentra el móvil. Se mide en radianes en el sistema internacional

φ_0 — Fase inicial. Valor de la fase para t = 0, cuando comenzamos a estudiar el movimiento. Nos permite calcular cómo era el movimiento al comenzar a estudiarlo. Por ej. La posición inicial se calculará sustituyendo t = 0 s en la ecuación, y quedará $y_0 = y_{(t=0)} = A \cdot sen(\varphi_0)$

b) A partir de la ecuación de la elongación "y" del m.a.s. $y = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Podemos obtener la velocidad de vibración derivando la elongación $v_y = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Y la aceleración derivando la velocidad $a_y = \frac{dv_y}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Comparando las expresiones de elongación y aceleración, vemos que $a_y = -\omega^2 \cdot y$, con lo que queda demostrado que la aceleración es proporcional al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio, pero en sentido contrario. La constante de proporcionalidad es el cuadrado de la frecuencia angular.

Junio 2012. A.3

3. Una onda en una cuerda viene descrita por: y (x, t) = 0,5 cos x · sen (30 t) (S. I.)

a) Explique qué tipo de movimiento describen los puntos de la cuerda y calcule la máxima velocidad del punto situado en x = 3,5 m.

b) Determine la velocidad de propagación y la amplitud de las ondas cuya superposición darían origen a la onda indicada.

a) La expresión que nos da el problema corresponde a una onda estacionaria (O.E.), ya que las partes espacial (k·x) y temporal (ω·t) aparecen en dos funciones trigonométricas separadas. En este caso, se trata de una O.E. de extremo libre (punto de amplitud máxima en x = 0).

Una O.E. se produce por la superposición (interferencia) de dos ondas viajeras de iguales características (amplitud, periodo, frecuencia, velocidad de propagación…) que se propagan por el mismo medio, en la misma dirección pero en sentidos contrarios. Como consecuencia de esta interferencia obtenemos:

- Cada punto de la cuerda describe un movimiento armónico simple, una vibración cuya amplitud no es única, sino que depende del punto del medio (del desfase entre las ondas que interfieren). Tendremos así puntos con interferencia constructiva y amplitud máxima (2A) o vientres, puntos con interferencia destructiva y amplitud cero (nodos), y puntos con amplitud intermedia. La expresión para la amplitud en este caso es A (x) = 0,5 cos x (m)

Para x = 0 m, cosx = 1, con lo que la amplitud es máxima = 0,5 m (extremo libre).

- La expresión general sería *y (x, t) = 2A cos kx · sen (ωt)* (S. I.) donde A = 0,25 m, k = 1 rad/m y ω = 30 rad/s, son la amplitud, número de onda y frecuencia angular de las ondas superpuestas.

- La propagación neta de energía es nula, ya que tenemos dos ondas transmitiendo la misma cantidad de energía por segundo en sentidos puestos. La velocidad de propagación de la O.E. es, por tanto, cero.

La velocidad de un punto de la cuerda (velocidad de vibración), depende del punto x y del instante t, y viene dada por la expresión

$$v_y = \frac{dy_{(x,t)}}{dt} = 0{,}5 \cdot \cos x \cdot 30 \cdot \cos(30t) = 15 \cdot \cos x \cdot \cos(30t)\ (m/s)$$

La velocidad es máxima (en valor absoluto) cuando $\cos(30t) = \pm 1$, es decir $v_{ymax} = |15 \cdot \cos x|\ (m/s)$

Sustituyendo x = 3,5 m (*y poniendo la calculadora en radianes*) obtenemos $v_{ymax} = 14{,}05\ m/s$

b) Como se ha explicado arriba, la O.E. se origina por la superposición de dos ondas viajeras de iguales características. En este caso, la expresión general sería *y (x, t) = 2A cos kx · sen (ωt) (S. I.),* donde A = 0,25 m, k = 1 rad/m y ω = 30 rad/s, son la amplitud, número de onda y frecuencia angular de las ondas superpuestas.

La velocidad de propagación de las ondas viajeras puede calcularse con la expresión

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{30\ rad/s}{1\ rad/m} = 30\ m/s$$

Solución: Amplitud de las ondas viajeras: A = 0,25 m.
Velocidad de propagación de las ondas viajeras: 30 m/s

Junio 2011. A.2

2. a) Movimiento armónico simple; características cinemáticas y dinámicas.
b) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: En un movimiento armónico simple la amplitud y la frecuencia aumentan si aumenta la energía mecánica.

a) (Esta pregunta corresponde a todo un apartado de un tema (o incluso a un tema completo), en el que normalmente se invierten de dos a tres días de clase en su tratamiento. No sé exactamente qué aspectos considerará más importantes la ponencia de selectividad. Creo que al menos había que hablar sobre:

- Definición de movimiento armónico simple (m.a.s.)
- Ecuación de movimiento $y(t) = A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)$
- Magnitudes cinemáticas del m.a.s: Periodo, frecuencia, fase, fase inicial, velocidad de vibración, aceleración de vibración. Definición, fórmula y unidades
- Relación entre elongación y aceleración (ecuación fundamental del m.a.s) $a_y = -\omega^2 \cdot y$
- Magnitudes dinámicas: fuerzas presentes en un m.a.s. (por ejemplo, un muelle horizontal unido a una masa). Relación frecuencia angular – constante elástica – masa.
- Energías presentes en un m.a.s. Energías cinética y potencial elástica. Variaciones de energía durante un periodo. Energía mecánica del m.a.s.

Con todo, me parece larguísimo, para ser un apartado de una pregunta. Y muy poco especificado)

b) *(Esta pregunta es bastante ambigua, sobre todo porque no nos dicen cómo se está aumentando la energía mecánica, ni de qué tipo de m.a.s. se trata.)*

Suponiendo el movimiento armónico simple descrito por una masa unida a un resorte, en el que no variamos ni la masa ni la constante elástica, la frecuencia angular de oscilación es una característica propia del sistema (llamada frecuencia de oscilación natural) y viene dada por $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ $\qquad f = \upsilon = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$

Por lo tanto, la frecuencia de oscilación no variará si aumentamos la energía mecánica del sistema.

La energía mecánica del m.a.s. se mantiene constante durante todo el movimiento, ya que sólo actúan fuerzas conservativas. Coincide con la energía potencial máxima

$$E_M = \frac{1}{2} K \cdot A^2$$

Vemos que un aumento de la energía mecánica se traduce en un aumento de la amplitud A del movimiento, ya que la constante elástica no cambiará.

Junio 2010. B. 4

4. En una cuerda tensa se genera una onda viajera de 10 cm de amplitud mediante un oscilador de 20 Hz. La onda se propaga a 2 m·s^{-1}.

a) Escriba la ecuación de la onda suponiendo que se propaga de derecha a izquierda y que en el instante inicial la elongación en el foco es nula.

b) Determine la velocidad de una partícula de la cuerda situada a 1 m del foco emisor en el instante 3 s.

a) Una onda armónica (u onda viajera) consiste en la propagación de una perturbación (descrita por un movimiento armónico simple) a través de un medio. La ecuación general de la elongación (y) de un punto del medio respecto a la posición de equilibrio viene dada por $y(x,t) = A \cdot sen(\omega \cdot t \pm k \cdot x + \varphi_0)$, donde

A: Amplitud. Valor máximo de la elongación. A = 10 cm = 0,1 m.

f: Frecuencia. Número de oscilaciones por segundo que realiza un punto del medio. f = 20 Hz

ω : Frecuencia angular. Indica la rapidez de las oscilaciones. La calculamos a partir del periodo

$$\omega = 2\pi\upsilon = 125{,}66\, rad\, s^{-1}$$

k: Número de onda. Es una magnitud inversa a la longitud de onda (salvo un factor 2π).

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{125{,}66\, rad\, s^{-1}}{2\, m\, s^{-1}} = 62{,}83\, rad\, m^{-1}$$

φ_0 : Fase inicial. Indica el estado de perturbación del foco generador de la onda en el instante inicial. La calculamos a partir de la elongación inicial del foco.

$$y_{(x=0,t=0)} = y_0 = A \cdot sen(\varphi_0) \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = arsen(\frac{y_0}{A}) = arsen(\frac{0}{0{,}1}) = 0\ rad$$

Como nos dicen que el movimiento es de derecha a izquierda, vemos que se mueve en el sentido negativo del eje x (suponiendo el criterio de signos positivo hacia la derecha y negativo hacia la izquierda). En ese caso, las partes espacial y temporal de la fase aparecen sumadas.

La expresión queda: $y(x,t) = 0{,}1 \cdot sen(125{,}66 \cdot t + 62{,}83 \cdot x)\ m$

b) La velocidad de vibración nos indica cómo varía la elongación de las partículas que componen la cuerda respecto al tiempo.

$$v_y(x,t) = \frac{dy}{dt} = 0{,}1 \cdot 125{,}66 \cdot cos(125{,}66 \cdot t + 62{,}83 \cdot x)\ m\, s^{-1} = 12{,}566 \cdot cos(125{,}66 \cdot t + 62{,}83 \cdot x)\, m\, s^{-1}$$

Sustituyendo los valores x = 1 m y t = 3 s, obtenemos $v_y = 12{,}56\ m\ s^{-1}$

(Este no es el único resultado válido. Si hubiéramos escogido el criterio de signos al contrario (positivo a la izquierda y negativo a la derecha), la ecuación cambiaría $y(x,t) = 0{,}1 \cdot sen(125{,}66 \cdot t - 62{,}83 \cdot x)\ m$.

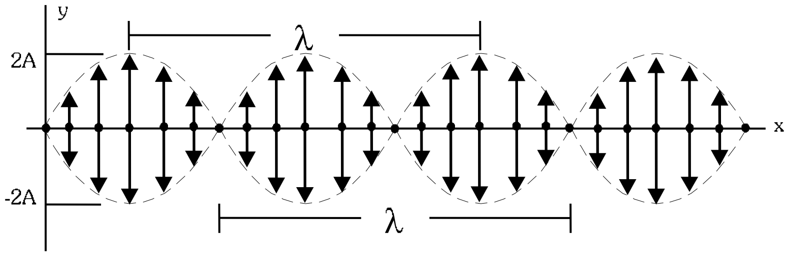
Y si hubiéramos escogido usar la función coseno en lugar de la función seno, la ecuación sería $y(x,t) = 0{,}3 \cdot cos(125{,}66 \cdot t + 62{,}83 \cdot x)\ m$, *y la velocidad de la partícula sería diferente)*

Junio 2009. A.2

2. a) Razone qué características deben tener dos ondas, que se propagan por una cuerda tensa con sus dos extremos fijos, para que su superposición origine una onda estacionaria.

b) Explique qué valores de la longitud de onda pueden darse si la longitud de la cuerda es L.

a) Una onda estacionaria se produce cuando en un mismo medio se propagann dos ondas de la misma naturaleza y con los mismos valores de amplitud y frecuencia (lógicamente también la velocidad de propagación y longitud de onda serán las mismas), en la misma dirección y con sentidos contrarios.



La superposición de ambas ondas da lugar a un caso particular de interferencia denominado onda estacionaria, donde existen puntos con interferencia destructiva (nodos) que no vibran (amplitud = A-A=0) intercalados con puntos con interferencia constructiva (vientres) que vibran con amplitud máxima (amplitud = A+A = 2A)

En una cuerda tensa con los extremos fijos, la ecuación de vibración de los puntos de la cuerda tiene la forma

$y(x,t) = 2A \cdot senkx \cdot sen\omega t$ o $y(x,t) = 2A \cdot senkx \cdot \cos\omega t$

La forma más común de producir una onda estacionaria en una cuerda tensa es pulsarla (una guitarra, por ejemplo). Las ondas que se superponen son la que hemos introducido y la onda reflejada en los extremos. En este reflejo se produce un cambio de fase de π radianes.

b) En una cuerda con extremos fijos, la posición de los nodos viene dada por la condición

$$sen(kx) = 0 \quad \rightarrow \quad kx = n\pi \rightarrow x = \frac{n\pi}{k} \rightarrow x = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad con\ n = 0,1,2...$$

Al ser el extremo x = L un punto fijo, será también un nodo. Esto obliga a que el valor de λ no puede ser cualquiera. Es decir, está cuantizado. De esta manera

$$x_{nodos} = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2L}{n} \qquad n = 1,2,3... \ (n=0 \text{ corresponde al nodo en el origen } x=0)$$

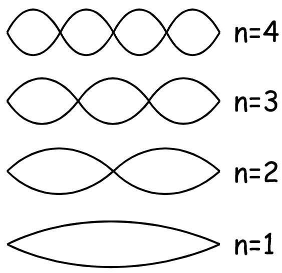
Con esto obtenemos los diferentes armónicos posibles para esa cuerda. Los cuatro primeros valores posibles de longitud de onda serán.

n = 1 → λ = 2L (armónico fundamental)

n = 2 → λ = L

n = 3 → λ = 2/3 L

n = 4 → λ = L/2



Junio 2009. B.4

4. Una onda armónica se propaga de derecha a izquierda por una cuerda con una velocidad de 8 m s^{-1}. Su periodo es de 0,5 s y su amplitud es de 0,3 m.

a) Escriba la ecuación de la onda, razonando cómo obtiene el valor de cada una de las variables que intervienen en ella.

b) Calcule la velocidad de una partícula de la cuerda situada en x = 2 m, en el instante t = 1 s.

a) Una onda armónica (u onda viajera) consiste en la propagación de una perturbación (descrita por un m.a.s) a través de un medio. La ecuación general de la elongación (*y*) de un punto del medio respecto a la posición de equilibrio viene dada por $y(x,t) = A \cdot sen(\omega \cdot t \pm k \cdot x + \varphi_0)$, donde

A: Amplitud. Valor máximo de la elongación. A = 0,3 m.

ω : Frecuencia angular. Indica la rapidez de las oscilaciones. La calculamos a partir del periodo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\, rad}{0{,}5\, s} = 4\pi\, rad\, s^{-1} = 12{,}566 rad\, s^{-1}$$

k: Número de onda. Es una magnitud inversa a la longitud de onda (salvo un factor 2π). Podemos calcularla de varias formas.

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{12{,}566 rad\, s^{-1}}{8\, m\, s^{-1}} = 1{,}571\, rad\, m^{-1}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v \cdot T} = \frac{2\pi\ rad}{8\, m\, s^{-1} \cdot 0{,}5\, s} = 1{,}571\, rad\, m^{-1}$$

φ_0 : Fase inicial. Indica el estado de perturbación del foco generador de la onda en el instante inicial. Suponemos su valor igual a cero, ya que el enunciado no nos ofrece datos sobre esta característica.

Como nos dicen que el movimiento es de derecha a izquierda, vemos que se mueve en el sentido negativo del eje x (suponiendo el criterio de signos positivo hacia la derecha y negativo hacia la izquierda). En ese caso, las partes espacial y temporal de la fase aparecen sumadas.

La expresión queda: $y(x,t) = 0{,}3 \cdot sen(12{,}566 \cdot t + 1{,}571 \cdot x)\ m$

b) La velocidad de vibración nos indica cómo varía la elongación de los puntos de la cuerda respecto al tiempo.

$$v_y(x,t) = \frac{dy}{dt} = 0{,}3 \cdot 12{,}566 \cdot \cos(12{,}566 \cdot t + 1{,}571 \cdot x)\ m\, s^{-1} = 3{,}77 \cdot \cos(12{,}566 \cdot t + 1{,}571 \cdot x)\, m\, s^{-1}$$

Sustituyendo los valores x = 2 m y t = 1 s, obtenemos $v_y = -3{,}77\ m\ s^{-1}$

(Este no es el único resultado válido. Si hubiéramos escogido el criterio de signos al contrario (positivo a la izquierda y negativo a la derecha, la ecuación cambiaría $y(x,t) = 0{,}3 \cdot sen(12{,}566 \cdot t - 1{,}571 \cdot x)\ m$.

Y si hubiéramos escogido usar la función coseno en lugar de la función seno, la ecuación sería $y(x,t) = 0{,}3 \cdot \cos(12{,}566 \cdot t + 1{,}571 \cdot x)\ m$ *y la velocidad de la partícula hubiera sido prácticamente de 0 m/s en ese instante*

Y, por último, podríamos haber escogido cualquier valor de fase inicial, en lugar de cero, con lo que el resultado también cambiaría)

Junio 2008. B.2

2. a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas.
b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

a) Un movimiento armónico simple (m.a.s.) es un movimiento oscilatorio periódico, cuya elongación (desplazamiento) respecto a la posición de equilibrio (y) viene dada por una función sinusoidal $y = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$, donde A es la amplitud del movimiento, ω la frecuencia angular y φ_0 la fase inicial del movimiento.

La velocidad la obtenemos derivando la posición respecto al tiempo. $v_y = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Y la aceleración, derivando la velocidad respecto al tiempo $a_y = \frac{dv_y}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Comparando las expresiones de posición y aceleración, comprobamos que se cumple que $a_y = -\omega^2 \cdot y$, es decir, la aceleración es proporcional al desplazamiento, y va en sentido contrario.

Dinámicamente, un sistema físico describe un m.a.s. cuando está sometido a una fuerza que es proporcional al deslazamiento respecto a una determinada posición (posición de equilibrio) y se opone a dicho desplazamiento. La ley de Hooke de los cuerpos elásticos es un ejemplo característico. Por ejemplo, para una partícula unida a un resorte, aplicando la 2º ley de Newton, obtenemos la expresión de la frecuencia característica de oscilación a partir de la masa de la partícula y de la constante elástica del resorte.

$$\left.\begin{array}{r} Fel = -K \cdot y \\ \Sigma F = m \cdot a_y = -m \cdot \omega^2 \cdot y \end{array}\right\} \quad K = m \cdot \omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

b) En la oscilación vertical, y despreciando el rozamiento, la partícula sólo está sometida a dos fuerzas conservativas, el peso y la fuerza elástica. Por consiguiente, la energía mecánica del sistema se mantendrá constante. Las energías presentes (cinética, potencial elástica y potencial gravitatoria) varían de la siguiente forma durante una oscilación completa:

$$Ec = \tfrac{1}{2} m \cdot v_y^{\,2} \quad ; \quad Ep_{el} = \tfrac{1}{2} K \cdot y^2 \quad ; \quad Epg = mgh$$

En el punto más alto de la oscilación, la energía potencial gravitatoria es máxima, así como la elástica, ya que el muelle sufre su máxima compresión. En este punto la velocidad de la partícula es nula, por lo que la energía cinética también lo es.
Al descender, disminuyen las energías gravitatoria y cinética, al tiempo que aumenta la energía cinética, hasta pasar por la posición de equilibrio, donde la Ec es máxima y la Ep elástica es nula (estiramiento cero).
A partir de este momento, con el estiramiento del muelle, vuelve a aumentar la energía potencial elástica, a costa de la disminución de la cinética, que llega a anularse en el punto de máximo estiramiento (el más bajo de la trayectoria), siendo otra vez máxima la energía elástica. La energía gravitatoria alcanza su valor más bajo.

A partir de aquí, el proceso se repite a la inversa. Durante la subida disminuye la energía elástica almacenada, transformándose en energía cinética y energía gravitatoria. Al pasar por la posición de equilibrio, nuevamente la Ec es máxima y la elástica se anula. Finalmente, al seguir ascendiendo se comprime el muelle, con lo que la Ec disminuye hasta anularse en el punto más alto, al tiempo que la energía elástica vuelve a aumentar hasta su valor máximo.

Junio 2007. A.4

4. Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple.

a) Escriba la ecuación de movimiento si la aceleración máxima es $5\pi^2$ cm s^{-2}, el periodo de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm.

b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica.

a) Un movimiento armónico simple (m.a.s.) es un movimiento oscilatorio periódico, cuya elongación (desplazamiento) respecto a la posición de equilibrio (y) viene dada por una función sinusoidal $y = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$, donde A es la amplitud del movimiento (valor máximo de la elongación), ω la frecuencia angular y φ_0 la fase inicial del movimiento.

Calculamos las magnitudes implicadas a partir de los datos del problema:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\, rad}{2\, s} = \pi\, rad/s$$

Aceleración máxima: $a_{ymáx} = A \cdot \omega^2 \quad \rightarrow \quad A = \frac{a_{ymáx}}{\omega^2} = \frac{5\pi^2\ cm/s^2}{\pi^2\ s^{-2}} = 5\, cm = 0{,}05\, m$

Fase inicial: Para t = 0 s, y = 2,5 cm = 0,025 m. sustituyendo en la ecuación.

$$y = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad \rightarrow \quad 0{,}025 = 0{,}05 \cdot sen(\varphi_0) \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = arcsen(0{,}5) = \tfrac{\pi}{6}\, rad = 0{,}52\, rad$$

(También es válido $\varphi_0 = \frac{5}{6}\pi$)

La ecuación de movimiento queda: $y(t) = 0{,}05 \cdot sen(\pi \cdot t + \frac{\pi}{6})\ m$

b) La velocidad de vibración se obtiene derivando la elongación respecto al tiempo.

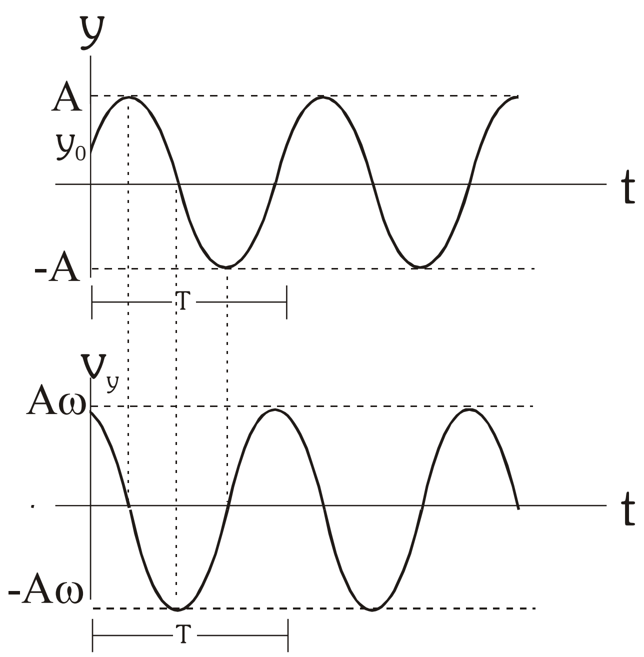
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 0{,}05 \cdot \pi \cdot cos(\pi \cdot t + \tfrac{\pi}{6})\, m/s$$

La velocidad es máxima (en valor absoluto) en aquellos instantes en que el móvil pasa por la posición de equilibrio, y nula cuando el móvil se encuentra en sus punto de elongación máxima.

La velocidad máxima es $0{,}05\pi\ m/s$. Ambas funciones (seno y coseno) están desfasadas π/2.

Para t = 0 s, el movimiento comienza con una elongación igual a 0,025 m (la mitad de la amplitud) y con una velocidad de 0,136 m/s (la velocidad máxima es de 0,157 m/s)

Como todo m.a.s, la gráfica representa un movimiento periódico.



Junio 2006. B.2

2. a) Demuestre que en un oscilador armónico simple la aceleración es proporcional al desplazamiento pero de sentido contrario.

b) Una partícula realiza un movimiento armónico simple sobre el eje OX y en el instante inicial pasa por la posición de equilibrio. Escriba la ecuación del movimiento y razone cuándo es máxima la aceleración.

a) Un movimiento armónico simple (m.a.s.) es un movimiento oscilatorio periódico, cuya elongación (desplazamiento) respecto a la posición de equilibrio (y) viene dada por una función sinusoidal $y = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$, donde A es la amplitud del movimiento, ω la frecuencia angular y φ_0 la fase inicial del movimiento.

La velocidad la obtenemos derivando la posición respecto al tiempo. $v_y = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Y la aceleración, derivando la velocidad respecto al tiempo $a_y = \frac{dv_y}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Comparando las expresiones de posición y aceleración, comprobamos que se cumple que $a_y = -\omega^2 \cdot y$, es decir, la aceleración es proporcional al desplazamiento, y va en sentido contrario.

b) Como hemos visto en el apartado anterior, la expresión general de un m.a.s. viene dada por $y = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_0)$, donde "y" representa el desplazamiento desde la posición de equilibrio, independientemente de la coordenada espacial en que se produzca el m.a.s.

La fase inicial φ_0 depende del estado inicial del movimiento. La cuestión nos dice que para t = 0 s, pasa por la posición de equilibrio, es decir, y = 0. Sustituyendo en la ecuación

$$0 = A \cdot sen(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \quad \rightarrow \quad A \cdot sen\varphi_0 = 0 \quad \rightarrow \quad sen\varphi_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = 0$$

La expresión del movimiento será $y = A \cdot sen(\omega \cdot t)$ Aplicando la relación demostrada en el apartado anterior, la aceleración es proporcional al desplazamiento. Así, la aceleración será máxima cuando el desplazamiento sea máximo, es decir, cuando la elongación sea igual a la amplitud (en valor absoluto). (y = $\pm$ A).

Junio 2005. B.4

4. La ecuación de una onda en una cuerda es: $y(x, t) = 0{,}4\ \text{sen}12\pi x\ \cos 40\pi t$ (S.I.)

a) Explique las características de la onda y calcule su periodo, longitud de onda y velocidad de propagación.

b) Determine la distancia entre dos puntos consecutivos con amplitud cero.

a) Nos encontramos ante la ecuación de una onda estacionaria (O.E.) con extremo fijo (las partes espacial y temporal están separadas en dos funciones trigonométricas multiplicadas). Se origina por la superposición de dos ondas viajeras (O.V.) idénticas que se propagan en la misma dirección pero en sentido contrario.

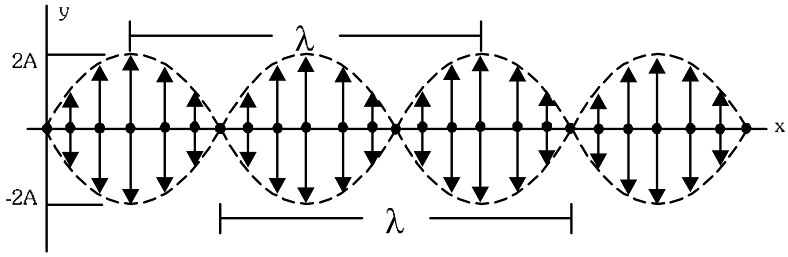
La expresión general para una O.E. de este tipo es

$y(x, t) = 2A\ \text{sen}\ kx\ \cos\omega t$ (S.I.) donde A, k y ω son magnitudes correspondientes a las ondas viajeras cuya superposición da lugar a la onda estacionaria.

La amplitud de la onda depende del punto x → $A(x) = 2A \cdot \text{sen}\ kx$

Para x = 0 tendremos amplitud nula (de ahí el nombre de "extremo fijo")

Existen puntos con amplitud máxima (vientres), punto con amplitud nula (nodos) y puntos con amplitud intermedia, como se observa en el dibujo.



Todos los puntos vibran en fase, con un periodo de vibración que coincide con el de las ondas viajeras. Así

$$\omega = 40\pi\ rad \cdot s^{-1} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}05\ s$$

La longitud de onda también coincide con la de las O.V. $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\ rad}{12\pi\ rad \cdot m^{-1}} = 0{,}167\ m$

La velocidad de propagación de una onda estacionaria es nula, ya que no hay una propagación neta de energía. Las O.V. que se superponen tienen velocidades de propagación idéntica, en sentido contrario.

La velocidad de propagación de las ondas viajeras puede calcularse $v_{OV} = \frac{\omega}{k} = \frac{40\pi\ rad \cdot s^{-1}}{12\pi\ rad \cdot m^{-1}} = 3{,}333\ m \cdot s^{-1}$

b) Los puntos con amplitud nula (nodos) están separados por media longitud de onda (0,0835 m). Este cálculo se realiza:

$$A(x) = 2A \cdot sen(kx) = 0 \rightarrow sen(kx) = 0 \rightarrow kx = n\pi \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \rightarrow x = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad ; \quad n \in N$$

Dos nodos consecutivos (n y $n+1$), están separados media longitud de onda, como queríamos probar.