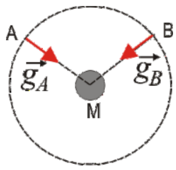
CUESTIONES Y PROBLEMAS SOBRE CAMPO GRAVITATORIO

2022. Junio.

A.2. a) En una determinada región del espacio existen dos puntos A y B en los que el potencial gravitatorio es el mismo. i) ¿Podemos concluir que los campos gravitatorios en A y en B son iguales? ii) ¿Cuál sería el trabajo realizado por el campo gravitatorio al desplazar una masa m desde A hasta B?
b) Dos masas de 2 y 4 kg se sitúan en los puntos A(2,0) m y B(0,3) m, respectivamente. i) Determine el campo y el potencial gravitatorio en el origen de coordenadas. ii) Calcule el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria para trasladar una tercera masa de 1 kg desde el origen de coordenadas hasta el punto C(2,3)m.
$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

a) i) La intensidad del campo gravitatorio ($\vec{g}$) es la fuerza por unidad de masa ejercida sobre una masa m que se encuentra inmersa en el campo gravitatorio. Es una magnitud vectorial.
El potencial gravitatorio (V) es la energía almacenada por unidad de masa en un punto del campo gravitatorio. Es una magnitud escalar. Nos dicen que $V_A = V_B$
No podemos concluir que los campos gravitatorios sean también iguales, ya que no sabemos la distribución de masas que origina el campo gravitatorio. Además, el campo gravitatorio no está relacionado directamente con el valor del potencial en un punto, sino con su variación, $\vec{g} = -\vec{\nabla}V$
Incluso en el caso de una sola masa puntual M, $V = -\frac{GM}{r}$, en el que ambos puntos estarían a la misma distancia de M para que los potenciales sean iguales, y entonces los campos gravitatorios serían iguales **en módulo**, $\frac{GM}{{r_A}^2} = \frac{GM}{{r_B}^2}$, las **direcciones** de ambos campos serían distintas (dibujo), por lo que ya no se cumpliría $\vec{g}_A = \vec{g}_B$

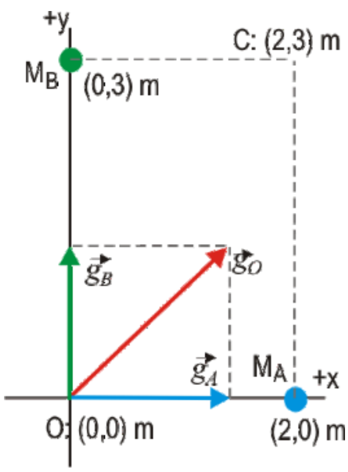


Es el carácter vectorial del campo gravitatorio el que hace que no podamos concluir que los campos gravitatorios sean iguales, aunque sus módulos puedan coincidir.

ii) Teniendo en cuenta que la fuerza gravitatoria es conservativa

$$W_{Fg} = -\Delta Ep_g = -(Ep_{gB} - Ep_{gA}) = Ep_{gA} - Ep_{gB} = m\cdot V_A - m\cdot V_B = 0, \quad \text{ya que } V_A = V_B$$

b) i) Estamos ante el campo gravitatorio producido por dos masas puntuales. Aplicamos el principio de superposición: $\vec{g} = \vec{g}_A + \vec{g}_B$
Intensidad del campo gravitatorio ($\vec{g}$): Fuerza gravitatoria ejercida por unidad de masa.



$$\vec{g}_A = -\frac{GM_A}{{r_A}^2}\vec{u}_{rA} \qquad \vec{r}_A = (0,0) - (2,0) = -2\vec{\imath}\, m \quad ; \; r_A = 2\, m \qquad \vec{u}_{rA} = \frac{\vec{r}_A}{r_A} = -\vec{\imath}$$

$$\vec{g}_A = -\frac{6.67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2kg}{(2m)^2}\cdot(-\vec{\imath}) = 3{,}335\cdot 10^{-11}\,\vec{\imath}\; Nkg^{-1}$$

$$\vec{g}_B = -\frac{GM_B}{{r_B}^2}\vec{u}_{rB} \qquad \vec{r}_B = (0,0) - (0,3) = -3\vec{\jmath}\, m \quad ; \; r_B = 3\, m \qquad \vec{u}_{rB} = \frac{\vec{r}_B}{r_B} = -\vec{\jmath}$$

$$\vec{g}_B = -\frac{6.67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 4kg}{(3m)^2}\cdot(-\vec{\jmath}) = 2{,}964\cdot 10^{-11}\,\vec{\jmath}\; Nkg^{-1}$$

$$\vec{g}_{(0,0)} = \vec{g}_A + \vec{g}_B \qquad \vec{g}_{(0,0)} = 3{,}335\cdot 10^{-11}\,\vec{\imath} + 2{,}964\cdot 10^{-11}\,\vec{\jmath}\, Nkg^{-1}$$

Para calcular el potencial gravitatorio (energía almacenada por unidad de masa) aplicamos nuevamente el principio de superposición: Punto O(0,0) m

$$V_O = V_{AO} + V_{BO} = -\frac{GM_A}{r_{AO}} - \frac{GM_B}{r_{BO}} = -\frac{6.67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2kg}{2\, m} - \frac{6.67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 4kg}{3\, m} = -1{,}556\cdot 10^{-10}\;\frac{J}{kg}$$

ii) La fuerza gravitatoria es conservativa. Por tanto, podemos calcular el trabajo realizado a partir de la energía potencial:

$$W_{Fg} = -\Delta Ep_g = -(Ep_{gC} - Ep_{gO}) = Ep_{gO} - Ep_{gC} = m\cdot V_O - m\cdot V_C = m\cdot(V_O - V_C)$$

Calculamos el potencial en C(2,3)m:

$$V_C = V_{AC} + V_{BC} = -\frac{GM_A}{r_{AC}} - \frac{GM_B}{r_{BC}} = -\frac{6.67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2kg}{3\, m} - \frac{6.67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 4kg}{2\, m} = -1{,}779\cdot 10^{-10}\;\frac{J}{kg}$$

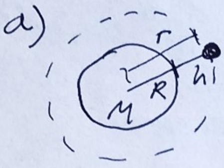
Y el trabajo: $W_{Fg} = m\cdot(V_O - V_C) = 1kg\cdot(-1{,}556\cdot 10^{-10}\;\frac{J}{kg} + 1{,}779\cdot 10^{-10}\;\frac{J}{kg}) = 2{,}23\cdot 10^{-11}\, J$

2022. Julio

A1. a) Deduzca la expresión de la energía mecánica de un satélite de masa *m* que orbita a una altura *h* de la superficie de un planeta de masa *M* y radio *R*. Exprese el resultado en función de *m*, *M*, *R* y *h*.

b) (Este apartado es de "trabajo y energía". Ver el documento correspondiente)

a)



$$E_M = E_C + E_{pg} = \frac{1}{2} m v_{orb}^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad r = R + h$$

$$E_M = \frac{1}{2} m \frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{GMm}{2(R+h)}$$

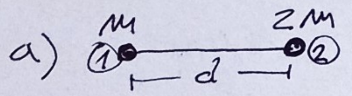
2022. Julio

A2. a) Dos cuerpos de masas *m* y 2*m* están separados una distancia *d*. Razone, con la ayuda de un esquema, si se anula el campo o el potencial gravitatorio en algún punto del segmento que los une.

b) Dos masas iguales de 2 kg están situadas en los puntos A(1,0) m y B(-1,0) m. i) Calcule la fuerza gravitatoria sobre una tercera masa *M* de 1 kg situada en el punto C(0,1) m. ii) Determine el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando la masa *M* se desplaza hasta el origen de coordenadas.

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

a)

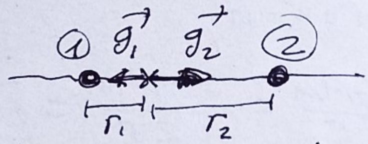


$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$ ppio superposición

$\vec{g} = 0 \Rightarrow \vec{g}_1 = -\vec{g}_2$ $\left\{ \frac{\cancel{G}\cancel{m}}{r_1^2} = \frac{\cancel{G}2\cancel{m}}{r_2^2} \rightarrow r_2 = \sqrt{2}\, r_1 \right.$

= dirección

$r_1 + r_2 = d$



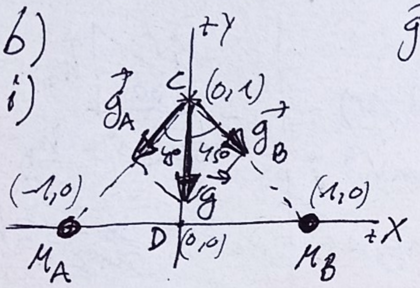
Sentidos opuestos

Sí es posible. $r_1 = \frac{d}{1+\sqrt{2}}$ $\qquad r_2 = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

$V = V_1 + V_2$ ppio superposición $\qquad V = -\frac{Gm}{r_1} - \frac{G2m}{r_2}$ $\qquad$ origen en $r \to \infty$

No puede anularse, suponiendo el origen de potencial para $r \to \infty$

b) i)



$\vec{g}$ creado por varias masas puntuales.

Ppio superposición $\vec{g}_C = \vec{g}_A + \vec{g}_B$

$M = M_A = M_B = 2\,Kg$ / $r = r_A = r_B = \sqrt{2}\,m$

$g_A = g_B = \frac{GM}{r^2} = 6'67 \cdot 10^{-11}\ N/Kg$

$$\vec{g}_A = -g_A \operatorname{sen}45° \vec{i} - g_A \cos 45° \vec{j} = -4'72 \cdot 10^{-11} \vec{i} - 4'72 \cdot 10^{-11} \vec{j}\ N/Kg$$

$$\vec{g}_B = g_B \operatorname{sen}45° \vec{i} - g_B \cos 45° \vec{j} = 4'72 \cdot 10^{-11} \vec{i} - 4'72 \cdot 10^{-11} \vec{j}\ N/Kg$$

$$\vec{g}_C = \vec{g}_A + \vec{g}_B = -9'44 \cdot 10^{-11} \vec{j}\ N/Kg$$

La Fuerza gravitatoria sobre $m = 1\,Kg$

$$\vec{F}_g = m \vec{g}_C = -9'44 \cdot 10^{-11} \vec{j}\ N$$

ii) $\vec{F_g}$ es conservativa $\rightarrow W_{Fg} = -\Delta Ep_g = -(Ep_{gD} - Ep_{gC}) = Ep_{gC} - Ep_{gD}$

ppio superposición: $Ep_{gC} = -\frac{GM_A m}{r_{AC}} - \frac{GM_B m}{r_{BC}} = -2\sqrt{2}\,G = -1'89\cdot 10^{-10}\,J$

$Ep_{gD} = -\frac{GM_A m}{r_{AD}} - \frac{GM_B m}{r_{BD}} = -4G = -2'67\cdot 10^{-10}\,J$

$W_{Fg} = Ep_{gC} - Ep_{gD} = -1'89\cdot 10^{-10}\,J + 2'67\cdot 10^{-10}\,J = 7'8\cdot 10^{-11}\,J$

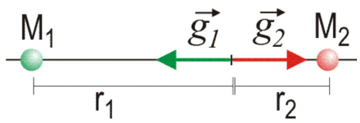
$W_{Fg} > 0$ No es necesaria Fuerza externa

2021. Junio

A.2. a) Razone la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "Si en un punto del espacio cerca de dos masas el campo gravitatorio es nulo, también lo será el potencial gravitatorio".
b) Dos masas $m_1 = 10$ kg y $m_2 = 10$ kg se encuentran situadas en los puntos A(0,0) m y B(0,2) m, respectivamente. i) Dibuje el campo gravitatorio debido a las dos masas en el punto C(1,1) m y determine su valor. ii) Calcule el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria cuando una tercera masa $m_3 = 1$ kg se desplaza desde el punto D(1,0) m hasta el punto C(1,1) m. $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

a) La intensidad del campo gravitatorio ($\vec{g}$) es la fuerza por unidad de masa ejercida sobre una masa m que se encuentra inmersa en el campo gravitatorio. Es una magnitud vectorial, y si se anula en un punto, es porque la suma vectorial de las intensidades producidas por cada masa se anula, $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0 \rightarrow \vec{g}_1 = -\vec{g}_2$

Esto ocurre cuando ambos campos tiene igual módulo ($\frac{GM_1}{r_1^2} = \frac{GM_2}{r_2^2}$), igual dirección y sentidos opuestos. Como vemos en el esquema, este punto se encuentra en el segmento que une ambas partículas, y está más cerca de la masa menor.

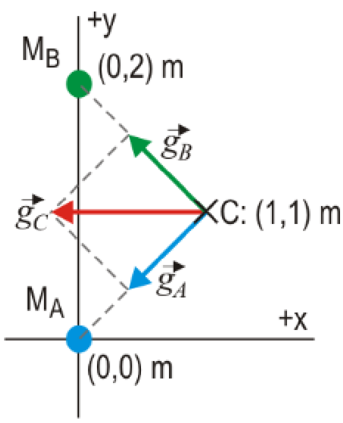


El potencial gravitatorio (V) es la energía almacenada por unidad de masa en un punto del campo gravitatorio. Es una magnitud escalar y, si suponemos el origen de potenciales en el infinito, se calcularía, aplicando el principio de superposición, $V = V_1 + V_2 = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2}$

Vemos que no puede anularse en ningún punto cercano (sólo se anula a una distancia infinita), sería siempre una cantidad negativa. La afirmación, por tanto, es falsa.

b) i) Estamos ante el campo gravitatorio producido por dos masas puntuales. Aplicamos el principio de superposición: $\vec{g} = \vec{g}_A + \vec{g}_B$

Intensidad del campo gravitatorio ($\vec{g}$): Fuerza eléctrica ejercida por unidad de masa.



$\vec{g}_A = -\frac{GM_A}{r_A^2}\vec{u}_{rA}$ $\qquad \vec{r}_A = (1,1) - (0,0) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}\ m \ ; \ r_A = \sqrt{2}\ m$

$\vec{u}_{rA} = \frac{\vec{r}_A}{r_A} = \frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}}{\sqrt{2}}$

$\vec{g}_A = -\frac{6.67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 10kg}{(\sqrt{2}m)^2}\cdot\frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}}{\sqrt{2}} = -2{,}358\cdot 10^{-10}\,\vec{\imath} - 2{,}358\cdot 10^{-10}\,\vec{\jmath}\ Nkg^{-1}$

$\vec{g}_B = -\frac{GM_B}{r_B^2}\vec{u}_{rB}$ $\qquad \vec{r}_B = (1,1) - (0,2) = \vec{\imath} - \vec{\jmath}\ m \ ; \ r_B = \sqrt{2}\ m$

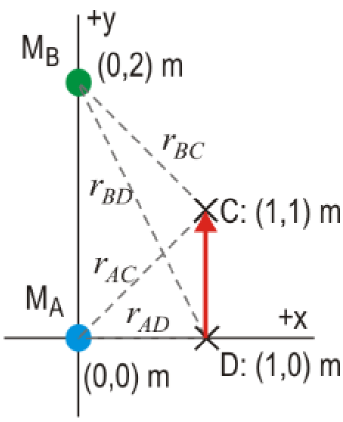
$\vec{u}_{rB} = \frac{\vec{r}_B}{r_B} = \frac{\vec{\imath}-\vec{\jmath}}{\sqrt{2}}$

$\vec{g}_B = -\frac{6.67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 10kg}{(\sqrt{2}m)^2}\cdot\frac{\vec{\imath}-\vec{\jmath}}{\sqrt{2}} = -2{,}358\cdot 10^{-10}\,\vec{\imath} + 2{,}358\cdot 10^{-10}\,\vec{\jmath}\ Nkg^{-1}$

$\vec{g}_C = \vec{g}_A + \vec{g}_B$ $\qquad \vec{g}_C = -4{,}716\cdot 10^{-10}\,\vec{\jmath}\ Nkg^{-1}$

ii) La fuerza gravitatoria es conservativa. Por tanto, podemos calcular el trabajo realizado a partir de la energía potencial: $W_{Fg} = -\Delta Ep_g = -(Ep_{gD} - Ep_{gC}) = Ep_{gC} - Ep_{gD} = m_3\cdot V_D - m_3\cdot V_C = m_3\cdot(V_D - V_C)$

Aplicando el principio de superposición:



$V_C = V_{AC} + V_{BC} = -\frac{GM_A}{r_{AC}} - \frac{GM_B}{r_{BC}} = -2\cdot\frac{6.67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 10kg}{\sqrt{2}m} = -9{,}433\cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}$

$$V_D = V_{AD} + V_{BD} = -\frac{GM_A}{r_{AD}} - \frac{GM_B}{r_{BD}} = -\frac{6.67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 10kg}{1\,m} - \frac{6.67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 10kg}{\sqrt{5}\,m} = -9{,}653\cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}$$

Y el trabajo: $W_{Fg} = m_3 \cdot (V_D - V_C) = 1kg \cdot (-9{,}653\cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg} + 9{,}433\cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}) = -2{,}2\cdot 10^{-11}\,J$

2021. Julio.

A.1. a) Razone si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Si un planeta tiene el doble de masa y la mitad del radio que otro planeta, su velocidad de escape será el doble".
b) Conociendo la gravedad y la velocidad de escape en la superficie de Marte, calcule: i) El radio de Marte. ii) La masa de Marte. $g_{Marte} = 3{,}7\ m\ s^{-2}$; $v_{escape} = 5\cdot 10^3\ m\ s^{-1}$; $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$

a) La velocidad de escape de un planeta es la velocidad mínima a la que habría que lanzar un objeto desde la superficie del planeta, para que se alejara indefinidamente, sin volver a caer. Su expresión es: $v_e = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{R}}$, siendo M la masa del planeta y R su radio.

Planeta 1: $v_{e1} = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_1}{R_1}}$ Planeta 2: $v_{e2} = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_2}{R_2}} = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot 2M_1}{\frac{R_1}{2}}} = \sqrt{\frac{4\cdot 2\cdot G\cdot M_1}{R_1}} = 2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_1}{R_1}} = 2\cdot v_{e1}$

La afirmación es cierta.

b) Gravedad superficial: $g_0 = \frac{G\cdot M}{R^2} \rightarrow M = \frac{g_0\cdot R^2}{G}$

Velocidad de escape: $v_e = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{R}} = \sqrt{\frac{2\cdot \cancel{G}\cdot g_0\cdot R^{\cancel{2}}}{\cancel{R}\cdot \cancel{G}}} = \sqrt{2\cdot g_0\cdot R} \rightarrow\ R = \frac{v_e^2}{2\cdot g_0}$

Sustituimos los datos: $g_0 = 3{,}7\ m\ s^{-2}$; $v_e = 5\cdot 10^3\ m\ s^{-1}$ → $R = 3{,}378\cdot 10^6\ m$

Sustituimos en la expresión de la masa $M = \frac{g_0\cdot R^2}{G} = 6{,}33\cdot 10^{23}\ kg$

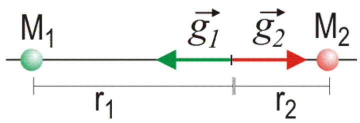
Julio2020. 1

1. a) i) ¿Puede ser nulo el campo gravitatorio en alguna región del espacio cercano a dos partículas sabiendo que la masa de una de ellas es el doble que la de la otra? ii) ¿Y el potencial gravitatorio? Razone las respuestas apoyándose en un esquema.
b) Dos masas de 2 kg y 5 kg se encuentran situadas en los puntos (0,3) m y (4,0) m, respectivamente. Calcule:
i) El potencial gravitatorio en el origen de coordenadas. ii) El trabajo necesario para desplazar una masa de 10 kg desde el origen de coordenadas al punto (4,3) m y comente el resultado obtenido.
$G = 6{,}67.10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$

a)

La intensidad del campo gravitatorio ($\vec{g}$) es la fuerza por unidad de masa ejercida sobre una masa m que se encuentra inmersa en el campo gravitatorio. Es una magnitud **vectorial**, y si se anula en un punto, es porque la suma vectorial de las intensidades producidas por cada masa se anula, $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0\ \rightarrow\ \vec{g}_1 = -\vec{g}_2$

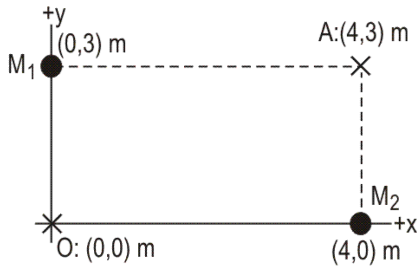
Esto ocurre cuando ambos campos tiene igual módulo ($\frac{GM_1}{{r_1}^2} = \frac{GM_2}{{r_2}^2}$), igual dirección y sentidos opuestos. Como vemos en el esquema, este punto se encuentra en el segmento que une ambas partículas, y está más cerca de la masa menor.



El potencial gravitatorio (V) es la energía almacenada por unidad de masa en un punto del campo gravitatorio. Es una magnitud **escalar** y, si suponemos el origen de potenciales en el infinito, se calcularía, aplicando el principio de superposición, $V = V_1 + V_2 = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2}$

Vemos que no puede anularse en ningún punto cercano (sólo se anula a una distancia infinita), sería siempre una cantidad negativa.

b)



Como ya se ha explicado en el apartado a), el potencial gravitatorio se calcula aplicando el principio de superposición.

Potencial en el punto O: (0,0) m

$$V_O = V_1 + V_2 = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} = -1{,}27 \cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}$$

$M_1 = 2$ kg, $r_1 = 3$ m, $M_2 = 5$ kg, $r_2 = 4$ m,

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar una masa m = 10 kg desde el punto O al punto A:(4,3) m lo calculamos teniendo en cuenta que la fuerza gravitatoria es conservativa.

Así. $W_{Fg} = -\Delta Ep_g = -\left(Ep_{gA} - Ep_{gO}\right) = Ep_{gO} - Ep_{gA} = m \cdot V_O - m \cdot V_A$

El potencial el en origen ya está calculado:

El potencial en el punto A: (4,3) m $\quad V_A = V_1 + V_2 = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} = -1{,}45 \cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}$

$M_1 = 2$ kg, $r_1 = 4$ m, $M_2 = 5$ kg, $r_2 = 3$ m,

Y el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre la masa m = 10 kg:

$$W_{Fg} = m \cdot V_O - m \cdot V_A = 1{,}8 \cdot 10^{-10}\ J$$

Al ser un trabajo positivo, este desplazamiento puede realizarse espontáneamente, sin necesidad de aplicar una fuerza externa.

Junio 2019. A. 1.

1. a) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y justifique la respuesta: "Si en un punto del espacio la intensidad del campo gravitatorio creado por varias masas es nulo, también lo será el potencial gravitatorio".
b) Dos cuerpos, de 10 kg de masa, se encuentran en dos de los vértices de un triángulo equilátero, de 0,6 m de lado. i) Calcule el campo gravitatorio que estas dos masas generan en el tercer vértice del triángulo. ii) Calcule el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria de las dos masas para traer otro cuerpo de 10 kg desde el infinito hasta el tercer vértice del triángulo. **$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}**

a) La afirmación es falsa si, como es lo habitual, suponemos el origen de potenciales en el infinito. No tienen por qué anularse ambas magnitudes en el mismo punto necesariamente. Lo razonaremos y pondremos un ejemplo donde no ocurre.

La intensidad del campo gravitatorio ($\vec{g}$) es la fuerza por unidad de masa ejercida sobre una masa m que se encuentra inmersa en el campo gravitatorio. Es una magnitud **vectorial**, y si se anula en un punto, es porque la suma vectorial de las intensidades producidas por cada masa se anula, $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \cdots = -\frac{GM_1}{{r_1}^2}\vec{u}_{r1} - \frac{GM_2}{{r_2}^2}\vec{u}_{r2} + \cdots = 0$.

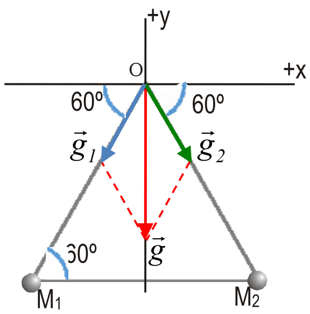
El potencial gravitatorio (V) es la energía almacenada por unidad de masa en un punto del campo gravitatorio. Es una magnitud **escalar** y, si suponemos el origen de potenciales en el infinito, se calcularía, aplicando el principio de superposición, $V = V_1 + V_2 + \cdots = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} + \cdots$

Vemos que no puede anularse en ningún punto, sería siempre una cantidad negativa.

Únicamente a una distancia infinita de las masas serían nulas tanto la intensidad del campo gravitatorio como el potencial gravitatorio.

Un ejemplo: El punto medio del segmento que une a dos masas M iguales es un punto donde la intensidad del campo gravitatorio se anula, ya que ambas intensidades son iguales en módulo y dirección, pero tienen sentidos contrarios. Sin embargo, el potencial gravitatorio en ese punto será $V = V_1 + V_2 = -\frac{GM}{r} - \frac{GM}{r} = -2\frac{GM}{r} < 0$ siempre.

(Nota: Esta es, explicada de una forma o de otra, la respuesta "académica", ya que normalmente trabajamos con un origen de potencial situado en el infinito. Pero no olvidemos que el valor del potencial es algo relativo, que depende del origen de potencial escogido. Podemos escoger el origen de potencial donde queramos, por ejemplo, en el punto preciso donde se anula el campo gravitatorio. Eso sí, la fórmula para calcular el potencial en cualquier otro punto tendrá probablemente una expresión endiablada, pero eso no nos lo preguntan… O sea, que una respuesta que deberían corregir con la máxima puntuación sería: **"La afirmación es correcta siempre que coloquemos en ese preciso punto el origen de potencial"**)

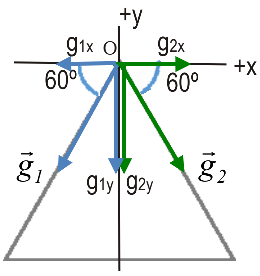


b) Nos encontramos ante el campo gravitatorio generado por dos masas puntuales. Aplicamos el principio de superposición. $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -\frac{GM_1}{{r_1}^2}\vec{u}_{r1} - \frac{GM_2}{{r_2}^2}\vec{u}_{r2}$

$M_1 = M_2 = M = 10$ kg $\qquad r_1 = r_2 = r = 0{,}6$ m

Colocamos el sistema de referencia en el vértice superior del triángulo.
Calculamos los módulos y descomponemos en componentes x e y.

$$g_1 = g_2 = \frac{GM}{r^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2}\cdot 10\ kg}{(0{,}6\ m)^2} = 1{,}85\cdot 10^{-9}\ \frac{N}{kg}$$



$g_{1x} = g_1 \cdot \cos 60^o = 9{,}25\cdot 10^{-10}$ N/kg
$g_{1y} = g_1 \cdot sen 60^o = 1{,}6\cdot 10^{-9}$ N/kg

Teniendo en cuenta los sentidos de las componentes:
$\vec{g_1} = -9{,}25\cdot 10^{-10}\,\vec{\imath} - 1{,}6\cdot 10^{-9}\,\vec{\jmath}\ Nkg^{-1}$

$g_{2x} = g_2 \cdot \cos 60^o = 9{,}25\cdot 10^{-10}$ N/kg
$g_{2y} = g_2 \cdot sen 60^o = 1{,}6\cdot 10^{-9}$ N/kg

Teniendo en cuenta los sentidos de las componentes:
$\vec{g_2} = 9{,}25\cdot 10^{-10}\,\vec{\imath} - 1{,}6\cdot 10^{-9}\,\vec{\jmath}\ Nkg^{-1}$

Sumando ambos vectores

$$\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2} = -9{,}25\cdot 10^{-10}\,\vec{\imath} - 1{,}6\cdot 10^{-9}\,\vec{\jmath} + 9{,}25\cdot 10^{-10}\,\vec{\imath} - 1{,}6\cdot 10^{-9}\,\vec{\jmath} = -3{,}2\cdot 10^{-9}\,\vec{\jmath}\ Nkg^{-1}$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar una masa m = 10 kg desde el infinito hasta el vértice (punto O) lo calculamos teniendo en cuenta que la fuerza gravitatoria es conservativa.

Así. $W_{Fg} = -\Delta Ep_g = -\left(Ep_{gO} - Ep_{g\infty}\right) = Ep_{g\infty} - Ep_{gO} = -Ep_{gO}$

Ya que hemos colocado el origen de potencial en el infinito.

$$Ep_{gO} = Ep_{g1} + Ep_{g2} = -\frac{GM_1 m}{r_1} - \frac{GM_2 m}{r_2} = -2\frac{GMm}{r} = -2{,}22 \cdot 10^{-8}\,J$$

De este modo, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es $W_{Fg} = -Ep_{gO} = 2{,}22 \cdot 10^{-8}\,J$

Al ser un trabajo positivo, este desplazamiento se realiza espontáneamente.

Junio 2018. A. 1.

1. a) Si la masa y el radio de la Tierra se duplican, razone si las siguientes afirmaciones son correctas: (i) El periodo orbital de la Luna se duplica; (ii) su velocidad orbital permanece constante.

b) La masa de Marte es aproximadamente la décima parte de la masa de la Tierra y su radio la mitad del radio terrestre. Calcule cuál sería la masa y el peso en la superficie de Marte de una persona que en la superficie terrestre tuviera un peso de 700 N.

$g_{0T} = 9{,}8$ m s^{-2}

a) La Luna describe órbitas (que en esta cuestión podemos suponer que son circulares) en torno a la Tierra debido a la atracción gravitatoria entre ambas.

Periodo orbital (T): Tiempo que emplea el satélite en describir una órbita completa $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$

Velocidad orbital (v_{orb}): Velocidad necesaria para que el satélite describa una órbita circular en torno al planeta a una distancia *r* determinada. $v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$,

En ambas expresiones, G es la constante de gravitación universal, M la masa de la Tierra y r el radio de la órbita lunar. El radio terrestre R no tiene ninguna influencia en estas magnitudes.

Si duplicamos la masa terrestre M' = 2M

(i) $T' = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM'}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G2M}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \frac{T}{\sqrt{2}}$ El periodo orbital no se duplica, sino que se reduce al 70,7%. La afirmación es incorrecta.

(ii) $v'_{orb} = \sqrt{\frac{GM'}{r}} = \sqrt{\frac{G2M}{r}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{2} \cdot v_{orb}$ La velocidad orbital no permanece constante, sino que aumenta al 141%. Falso.

b) $M_M = 0{,}1 M_T$ $\quad R_M = 0{,}5\, R_T$

El peso en la superficie de un planeta es la fuerza gravitatoria que el planeta ejerce sobre dicho cuerpo a una distancia igual al radio del planeta. $F_g = m \cdot g_0$

En la superficie terrestre: $F_{gT} = m \cdot g_{0T} \rightarrow 700\,N = m \cdot 9{,}8\frac{N}{kg} \rightarrow m = 71{,}43\,kg$

La masa (la cantidad de materia) será la misma en la superficie de la Tierra o de Marte. Lo que cambiará será la atracción gravitatoria, el peso. En Marte, $F_{gM} = m \cdot g_{0M}$

La gravedad superficial de un planeta (g_0) depende de la masa del planeta y de su radio, según $g_0 = \frac{GM}{R^2}$

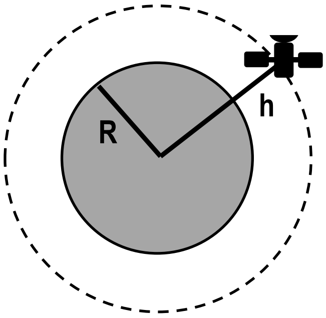
Para Marte $g_{0M} = \frac{G \cdot M_M}{{R_M}^2} = \frac{G \cdot 0{,}1 M_T}{(0{,}5 R_T)^2} = \frac{G \cdot 0{,}1 M_T}{(0{,}5 R_T)^2} = 0{,}4 \cdot \frac{G \cdot M_T}{{R_T}^2} = 0{,}4 \cdot g_{0T} = 3{,}92\,\frac{N}{kg}$

Así, el peso en Marte, $F_{gM} = m \cdot g_{0M} = 71{,}43\,kg \cdot 3{,}92\frac{N}{kg} = 280\,N$

Masa = 71,43 kg, Peso = 280 N

Junio 2018. B.1

1. a) Un satélite artificial describe una órbita circular en tomo a la Tierra. ¿Cómo cambiaría su velocidad orbital si la masa de la Tierra se duplicase, manteniendo constante su radio? ¿Y su energía mecánica?
b) Se desea situar un satélite de 100 kg de masa en una órbita circular a 100 km de altura alrededor de la Tierra. (i) Determine la velocidad inicial mínima necesaria para que alcance dicha altura; (ii) una vez alcanzada dicha altura, calcule la velocidad que habría que proporcionarle para que se mantenga en órbita.
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km



a) El satélite artificial describe órbitas circulares en torno a la Tierra debido a la atracción gravitatoria entre ambas.

Velocidad orbital (v_{orb}): Velocidad necesaria para que el satélite describa una órbita circular en torno al planeta a una distancia r determinada. $v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$,

donde M_T es la masa de la Tierra y r el radio de la órbita.

El radio terrestre no influye. Al duplicar la masa terrestre $M_T' = 2M_T$

$$v'_{orb} = \sqrt{\frac{GM'_T}{r}} = \sqrt{\frac{G2M_T}{r}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{2}\cdot v_{orb}$$

Vemos que la velocidad orbital aumenta en un factor $\sqrt{2}$

La energía mecánica del satélite es la suma de sus energías cinética y potencial gravitatoria. En el caso de una órbita circular

$$E_M = Ec + Ep_g = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{r} = -\frac{GM_Tm}{2r}$$

Vemos directamente que al duplicar la masa de la Tierra, la energía mecánica del satélite se duplica

b) Resolvemos la cuestión aplicando la conservación de la energía mecánica del satélite, ya que, si despreciamos el rozamiento con el aire, una vez lanzado, sobre éste sólo actúa la fuerza gravitatoria, que es conservativa. La velocidad mínima se refiere a la necesaria para que el satélite llegue a 100 km de altura con velocidad cero.

1) Situación inicial: Superficie terrestre: $r_1 = R_T$, v_1

2) Situación final: $h = 100$ km; $r = R_T+h = 6470$ km $= 6{,}47\cdot10^6$ m ; $v_2 = 0$ m/s

$$E_{M1} = Ec_1 + Ep_{g1} = \tfrac{1}{2}mv_1{}^2 - \frac{GM_Tm}{r_1} = \tfrac{1}{2}mv_1{}^2 - \frac{GM_Tm}{R_T}$$

$$E_{M2} = Ec_2 + Ep_{g2} = \tfrac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{GM_Tm}{r_2} = -\frac{GM_Tm}{R_T+h}$$

$$E_{M1} = E_{M2} \rightarrow \frac{1}{2}mv_1{}^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = -\frac{GM_Tm}{R_T+h} \rightarrow v_1{}^2 = \frac{2GM_T}{R_T} - \frac{2GM_T}{R_T+h} \rightarrow v_1 = 1{,}39\cdot10^3 \text{ m/s}$$

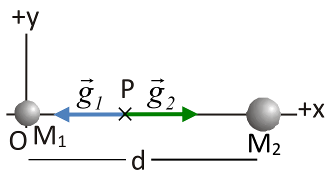
La velocidad orbital necesaria para que mantenga una órbita circular a esa altura, despreciando rozamiento con la atmósfera: $v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R_T+h}} = 7{,}85\cdot10^3$ m/s

Junio 2017. A.1

1. a) Dos partículas, de masas m y 2m, se encuentran situadas en dos puntos del espacio separados una distancia d. ¿Es nulo el campo gravitatorio en algún punto cercano a las dos masas? ¿Y el potencial gravitatorio? Justifique las respuestas.

b) Dos masas de 10 kg se encuentran situadas, respectivamente, en los puntos (0,0) m y (0,4) m. Represente en un esquema el campo gravitatorio que crean en el punto (2,2) m y calcule su valor. G = 6,67·10⁻¹¹ N m² kg⁻²

a) Nos encontramos ante dos masas puntuales que crean campo gravitatorio a su alrededor. En cualquier punto del espacio, el campo gravitatorio total se calcula aplicando el principio de superposición, es decir, el campo total en un punto es la suma de los dos campos gravitatorios individuales. Del mismo modo se calcula el potencial.



Campo gravitatorio: Para que el campo gravitatorio total sea cero, ambos vectores deben tener igual módulo, igual dirección y sentidos opuestos.

$$\vec{g}_P = \vec{g}_{1P} + \vec{g}_{2P} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{g}_{1P} = -\vec{g}_{2P}$$

El punto donde estas condiciones se cumplen debe estar en la línea que une ambas masas, y en la zona intermedia entre las mismas, como indica el dibujo. Además, se encontrará más cerca de la masa menor (la 1, en este caso).

Igualando los módulos $\frac{\cancel{G}M_1}{{r_1}^2} = \frac{\cancel{G}M_2}{{r_2}^2} \rightarrow \frac{\cancel{m}}{{r_1}^2} = \frac{2\cancel{m}}{{r_2}^2} \rightarrow r_2 = \sqrt{2} \cdot r_1$

Vemos en el dibujo que ambas distancias r_1 y r_2 suman la distancia d. $r_1 + r_2 = d$

Resolviendo el sistema, tenemos que $r_1 = \frac{d}{\sqrt{2}-1}$ A esa distancia se encuentra P de la masa M_1.

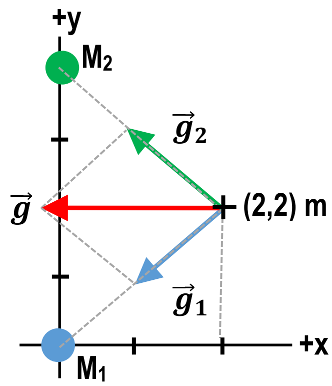
Potencial gravitatorio: $V_P = V_1 + V_2$

Si escogemos, como es habitual, el origen de potencial a una distancia infinita, la expresión para el potencial gravitatorio creado por una masa puntual es $V = -\frac{GM}{r}$ con lo que $V = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2}$

Vemos que el potencial siempre será un número negativo, así que es **imposible** que el potencial se anule en un punto <u>cercano</u> a las masas (es decir, que r_1 y r_2 no tiendan a infinito)

(Nota: Esta es, explicada de una forma o de otra, la respuesta "académica", ya que normalmente trabajamos con un origen de potencial situado en el infinito. Pero no olvidemos que el valor del potencial es algo relativo, que depende del origen de potencial escogido. Podemos escoger el origen de potencial donde queramos, por ejemplo, en el punto medio entre las dos masas, y en ese punto precisamente el potencial total será nulo, por definición. Eso sí, la fórmula para calcular el potencial en cualquier otro punto tendrá probablemente una expresión endiablada, pero eso no nos lo preguntan… O sea, que una respuesta que deberían corregir como válida sería: **"El potencial gravitatorio se anula en cualquier punto que escojamos, siempre que coloquemos ahí el origen de potencial"**)

b) Aplicando de nuevo el principio de superposición…



$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

$$\vec{g}_1 = -\frac{GM_1}{{r_1}^2}\vec{u}_{r1} = -\frac{6.67 \cdot 10^{-11} N\, m^2\, kg^{-2} \cdot 10\, kg}{8\, m^2} \cdot \frac{2\,\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}}{\sqrt{8}} =$$
$$= -5{,}896 \cdot 10^{-11}\,\vec{\imath} - 5{,}896 \cdot 10^{-11}\vec{\jmath}\ \frac{N}{kg}$$

$\vec{r}_1 = (2,2) - (0,0) = 2\,\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\ m \qquad r_1 = \sqrt{8}\ m \qquad \vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{2\,\vec{\imath}+2\vec{\jmath}}{\sqrt{8}}$

$$\vec{g}_2 = -\frac{GM_2}{{r_2}^2}\vec{u}_{r2} = -\frac{6.67 \cdot 10^{-11} N\, m^2\, kg^{-2} \cdot 10\, kg}{8\, m^2} \cdot \frac{2\,\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}}{\sqrt{8}} = -5{,}896 \cdot 10^{-11}\,\vec{\imath} + 5{,}896 \cdot 10^{-11}\vec{\jmath}\ \frac{N}{kg}$$

$\vec{r}_2 = (2,2) - (0,4) = 2\,\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}\ m \qquad r_2 = \sqrt{8}\ m \qquad \vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{2\,\vec{\imath}-2\vec{\jmath}}{\sqrt{8}}$

El campo total $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -1{,}179 \cdot 10^{-10}\,\vec{\imath}\ \frac{N}{kg}$

Junio 2017. B.1

1. a) Un bloque de acero está situado sobre la superficie terrestre. Indique justificadamente cómo se modificaría el valor de su peso si la masa de la Tierra se redujese a la mitad y se duplicase su radio.
b) El planeta Mercurio tiene un radio de 2440 km y la aceleración de la gravedad en su superficie es 3,7 m s^{-2}. Calcule la altura máxima que alcanza un objeto que se lanza verticalmente desde la superficie del planeta con una velocidad de 0,5 m s^{-1}. G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}

a) El peso de un objeto en la superficie de un planeta es la fuerza gravitatoria que el planeta ejerce sobre el objeto situado a una distancia R (el radio del planeta) de su centro.
Siendo M la masa de la Tierra, m la masa del objeto, y R el radio de la Tierra, calculamos el peso con la expresión

$$F_g = \frac{GMm}{R^2}$$

Si reducimos a la mitad la masa de la Tierra (M'= 0,5 M) y duplicamos el radio (R' = 2 R), el peso queda

$$F'_g = \frac{GM'm}{R'^2} = \frac{G \cdot 0{,}5 \cdot Mm}{(2R)^2} = \frac{GMm}{8\,R^2} = \frac{Fg}{8}$$

El peso del objeto se reduciría a la octava parte.

b) Resolvemos esta cuestión aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, ya que, una vez lanzado el objeto, sobre él sólo actúa la fuerza gravitatoria ejercida por el planeta, que es una fuerza conservativa. Despreciamos cualquier posible rozamiento con la atmósfera de Mercurio (casi inexistente, por otra parte).

Dada la baja velocidad con la que se lanza el objeto, supondremos que la altura que alcanzará será muy pequeña comparada con el radio de Mercurio (h << R), con lo que consideraremos que la gravedad se mantiene constante durante la subida, y la energía potencial la calcularemos con la expresión $Ep_g = m{\cdot}g_0{\cdot}h$, con el nivel cero de energía potencial colocado en la superficie (h = 0 m). Al final, comprobaremos que la suposición es acertada.

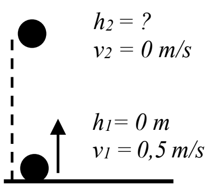
Así: $E_M = Ec + Ep_g = \frac{1}{2}mv^2 + m \cdot g_0 \cdot h$

Situación inicial:

$h_1 = 0$ m, $v_1 = 0{,}5$ m/s $\qquad E_{M1} = Ec_1 + Ep_{g1} = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + m \cdot g_0 \cdot h_1 = \frac{1}{2}m{v_1}^2$

Situación final:

$h_2 = ?$, $v_2 = 0$ m/s $\qquad E_{M2} = Ec_2 + Ep_{g2} = \frac{1}{2}m{v_2}^2 + m \cdot g_0 \cdot h_2 = m \cdot g_0 \cdot h_2$



Por tanto $E_{M1} = E_{M2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}m{v_1}^2 = m \cdot g_0 \cdot h_2 \quad \rightarrow \quad h_2 = \frac{{v_1}^2}{2 \cdot g_0}$

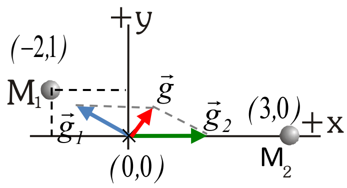
Sustituyendo los datos: $v_1 = 0{,}5\ m\ s^{-1}$, $g_0 = 3{,}7\ m\ s^{-2}$ $\rightarrow$ *$h_2 = 0{,}034$ m = 3,4 cm sobre la superficie*

Es evidente que la suposición es correcta, ya que la altura alcanzada es despreciable comparada con el radio del planeta Mercurio.

(Es posible que se trate de un error del enunciado. La velocidad de lanzamiento es demasiado baja, y la altura resulta casi ridícula. Si hubiéramos usado la expresión general para la Epg, es posible que, al redondear, cometiéramos una mayor imprecisión que la altura final que alcanza. No sé si querían decir 0,5 km/s…)

Junio 2016. A. 3

3. Dos partículas de masas m_1=3 kg y m_2=5 kg se encuentran situadas en los puntos P_1(-2,1) y P_2(3,0), respectivamente.
a) Represente el campo gravitatorio resultante en el punto O(0,0) y calcule su valor.
b) Calcule el trabajo realizado para desplazar otra partícula de 2 kg desde el punto O(0,0) m hasta el punto P(3,1) m. Justifique si es necesario especificar la trayectoria seguida en dicho desplazamiento.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ;



a) Nos encontramos ante dos masas puntuales que crean campo gravitatorio a su alrededor. En cualquier punto del espacio, el campo gravitatorio total se calcula aplicando el principio de superposición, es decir, el campo total en un punto es la suma de los dos campos gravitatorios individuales.

$$\vec{g}_O = \vec{g}_{1O} + \vec{g}_{2O} = -\frac{GM_1}{r_1^2}\vec{u}_{r1} - \frac{GM_2}{r_2^2}\vec{u}_{r2}$$

· $M_1 = 3$ kg ; $\vec{r}_1 = (0,0)-(-2,1) = (2,-1) = 2\vec{i} - \vec{j}\ m$ $\qquad r_1 = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}\ m$

$$\vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{2\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{g}_{1O} = -\frac{GM_1}{r_1^2}\vec{u}_{r1} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 3}{(\sqrt{5})^2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}\right)\tfrac{N}{kg} = -3{,}58\cdot 10^{-11}\vec{i} + 1{,}79\cdot 10^{-11}\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}$$

· $M_2 = 5$ kg ; $\vec{r}_2 = (0,0)-(3,0) = (-3,0) = -3\vec{i}\ m$ $\qquad r_2 = 3\,m$

$$\vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{-3\vec{i}}{3} = -\vec{i}$$

$$\vec{g}_{2O} = -\frac{GM_2}{r^2}\vec{u}_{r2} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5}{(3)^2}\cdot(-\vec{i})\tfrac{N}{kg} = 3{,}71\cdot 10^{-11}\vec{i}\ \tfrac{N}{kg}$$

· $$\vec{g}_O = \vec{g}_{1O} + \vec{g}_{2O} = -3{,}58\cdot 10^{-11}\vec{i} + 1{,}79\cdot 10^{-11}\vec{j} + 3{,}71\cdot 10^{-11}\vec{i}\ \tfrac{N}{kg} = 1{,}3\cdot 10^{-12}\vec{i} + 1{,}79\cdot 10^{-11}\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}$$

b) El campo gravitatorio es un campo conservativo. Eso significa que podemos calcular el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria en un desplazamiento entre dos puntos a partir de la variación de la energía potencial gravitatoria $W_{Fg} = -\Delta Epg = -(Epg_P - Epg_O) = Epg_O - Epg_P$

La energía potencial almacenada se calcula nuevamente aplicando el principio de superposición

$$Epg = Epg_1 + Epg_2 = -\frac{GM_1 m}{r_1} - \frac{GM_2 m}{r_2}$$

En el punto O:(0,0) m $\qquad r_{1O} = \sqrt{5}\,m \qquad r_{2O} = 3\,m \qquad$ (calculados en el apartado a)

$$Epg_O = -\frac{GM_1 m}{r_{1O}} - \frac{GM_2 m}{r_{2O}} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 3\cdot 2}{\sqrt{5}} - \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5\cdot 2}{3} = -4{,}01\cdot 10^{-10}\ J$$

En el punto P:(3,1) m $\qquad \vec{r}_{1P} = (3,1)-(-2,1) = (5,0)\,m \qquad r_{1P} = 5\,m$

$\qquad \vec{r}_{2P} = (3,1)-(3,0) = (0,1)\,m \qquad r_{2P} = 1\,m$

$$Epg_P = -\frac{GM_1 m}{r_{1P}} - \frac{GM_2 m}{r_{2P}} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 3\cdot 2}{5} - \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5\cdot 2}{1} = -7{,}47\cdot 10^{-10}\ J$$

El trabajo entre el punto inicial O y el punto final P los calculamos con la expresión explicada arriba

$$W_{Fg} = Epg_O - Epg_P = -4{,}01\cdot 10^{-10}\ J - (-7{,}47\cdot 10^{-10}\ J) = 3{,}46\cdot 10^{-10}\ J$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es positivo, por lo que no es necesario realizar ningún trabajo externo para producir este desplazamiento.

En cuanto a la trayectoria, como la fuerza gravitatoria es conservativa, el trabajo que realiza sólo depende de los puntos inicial y final, independientemente del camino (trayectoria) seguido. No hay que especificar la trayectoria porque por todas se obtendría el mismo resultado.

Junio 2016. B. 1

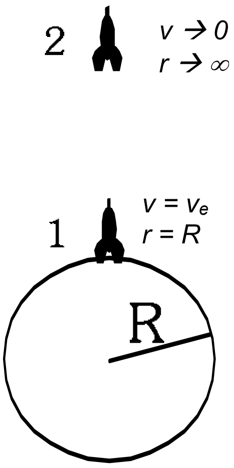
1. a) Defina velocidad de escape de un planeta y deduzca su expresión.
b) Se coloca un satélite en órbita circular a una altura h sobre la Tierra. Deduzca las expresiones de su energía cinética mientras orbita y calcule la variación de energía potencial gravitatoria que ha sufrido respecto a la que tenía en la superficie terrestre.

a) La velocidad de escape para un planeta se define como *la velocidad a la que habría que lanzar un cuerpo desde la superficie del planeta para que escapara de su atracción gravitatoria, alejándose indefinidamente*.

En este cálculo se desprecia el rozamiento con la atmósfera.

Resolvemos el problema empleando conceptos energéticos:

En primer lugar tenemos en cuenta que, al no tener en cuenta el rozamiento, la única fuerza que va a actuar sobre el movimiento del cohete será la gravitatoria, que es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica del cohete se mantendrá constante.



Datos: M, R: masa y radio del planeta m: masa del proyectil

Sistemas de referencia: mediremos las distancias desde el centro del planeta.

El origen de energía potencial gravitatoria lo colocamos a una distancia infinita del centro planetario, por lo que la expresión usada para la Epg será $Ep_g = -\dfrac{G \cdot M \cdot m}{R}$

Consideraremos dos situaciones:

Inicial: Lanzamiento del cohete desde la superficie terrestre con velocidad v_e.

$$Ec_1 = \tfrac{1}{2} m v_e^{\,2} \qquad Ep_{g1} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

$$E_{M1} = Ec + Ep_g = \tfrac{1}{2} m v_e^{\,2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

Final: el cohete se aleja indefinidamente. En el límite cuando la distancia r tiende a infinito, la velocidad (y la Ec) tiende a cero, al igual que la energía potencial, ya que el origen de Ep está colocado en el infinito.

$$E_{M2} = \lim_{r\to\infty} E_M = \lim_{r\to\infty} (Ec + Ep_g) = 0$$

Aplicando la conservación de la energía mecánica:

$$E_{M1} = E_{M1} \Rightarrow \tfrac{1}{2} m v_e^{\,2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2} \cancel{m} v_e^{\,2} = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{R} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Si el lanzamiento se realiza desde una altura h sobre la superficie del planeta, la expresión queda $v_e = \sqrt{\dfrac{2GM}{R+h}}$

b) La energía cinética de cualquier cuerpo viene dada por $Ec = \tfrac{1}{2} m v^2$. En el caso del satélite, la velocidad es la velocidad orbital $v_{orb} = \sqrt{\dfrac{GM}{r}} = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$ Sustituyendo en la expresión de la energía cinética

$$Ec = \tfrac{1}{2} m v_{orb}^2 = \tfrac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{GM}{R+h}} \right)^2 = \frac{GMm}{2(R+h)}$$

La energía potencial del satélite se calcula con la expresión $Ep_g = -\dfrac{G \cdot M \cdot m}{r}$ $(Epg = 0 \; para \; r \to \infty)$

En la superficie terrestre (1): $Ep_{g1} = -\dfrac{G \cdot M \cdot m}{R}$ En la órbita (2): $Ep_{g2} = -\dfrac{G \cdot M \cdot m}{R+h}$

Y la diferencia: $Ep_{g2} - Ep_{g1} = \left(-\dfrac{GMm}{R+h} \right) - \left(-\dfrac{GMm}{R} \right) = \dfrac{GMm}{R} - \dfrac{GMm}{R+h} = \dfrac{GMmh}{R^2 + Rh}$

Obtenemos una cantidad positiva, por lo que la energía potencial aumenta, como era de esperar.

Junio 2015. B.1

1. a) Explique las características del campo gravitatorio terrestre.
b) La energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa m, situado a una altura h sobre la superficie de la Tierra, se puede calcular con la fórmula E_p = mgh. Explique el significado y los límites de validez de dicha expresión. ¿Se puede calcular la energía potencial gravitatoria de un satélite utilizando la fórmula anterior? Razone la respuesta.

a) Esta pregunta puede ser bastante larga, ya que corresponde a un apartado entero del tema de gravitación. En este texto nos limitaremos a enumerar los puntos que se podrían desarrollar, ya que no está claro qué preguntan concretamente.

- Características generales de la interacción gravitatoria, que evidentemente se cumplen para la Tierra, considerada como una esfera de masa $5{,}98\cdot 10^{24}$ kg: atractiva, conservativa, central, líneas de campo y superficies equipotenciales, ley de gravitación de Newton…
- Caso de la Tierra como esfera maciza que genera un campo gravitatorio en el exterior, donde podemos seguir empleando las expresiones válidas para masas puntuales.
- Magnitudes vectoriales (fuerza, gravedad) y escalares (potencial, energía potencial). Definición y expresiones para el exterior de la Tierra. Variación de la gravedad con la altura. Gravedad superficial. ¿Variación de la gravedad con la latitud, al no ser la Tierra una esfera perfecta?
- Aproximación de gravedad constante para una altura muy inferior al radio terrestre. La fórmula Epg = mgh frente a la fórmula general. Rango de validez.
- Velocidad de escape de la Tierra.
- Campo en el interior de la Tierra. Aplicación del teorema de Gauss. (no creo que sea necesario esto)

b) Considerando la Tierra como una esfera maciza, son válidas para su exterior las expresiones obtenidas para el caso de masas puntuales. Así, la energía potencial gravitatoria se calcula como

$Ep_g = -G\cdot\frac{M\cdot m}{r}$ escogiendo el nivel cero de energía potencial para $r\to\infty$

donde M es la masa de la Tierra, m la del cuerpo, y r la distancia al centro de la Tierra. r = R + h.

La fórmula $Ep_g = mgh$, es una aproximación de la fórmula anterior, válida (dentro del margen de error de toda aproximación) cuando la altura durante todo el movimiento que estamos estudiando puede considerarse muy pequeña en comparación con el radio del planeta, es decir, que podamos considerar que la gravedad se mantiene constante. En esta expresión, el nivel cero de energía potencial es diferente del de la fórmula general, ya que se escoge en la superficie terrestre, para h = 0 m.

Como podemos ver, la altura a la que está un satélite artificial (más de 400 km, y hasta 36000 km los geoestacionarios) no puede considerarse muy pequeña en comparación con el radio terrestre, por lo que en estos casos siempre habrá que usar la expresión $Ep_g = -G\cdot\frac{M\cdot m}{r}$

(No creo que la demostración que viene a continuación sea necesaria)

Podemos comprobar que, si en el cálculo de la Ep, en lugar de poner el origen en el infinito, lo colocamos en la superficie, y hacemos una aproximación, obtendremos la segunda expresión.

Habíamos obtenido $\Delta Ep_g = -W_{Fg} \to Ep_{gB} - Ep_{gA} = -\int_A^B \vec{F}_g\cdot d\vec{r} = \ldots = \frac{-G\cdot M\cdot m}{r_B} + \frac{G\cdot M\cdot m}{r_A}$

Escogiendo el nivel cero en la superficie ($r_A = R$; $Ep_A = 0$) $Ep_g = -GMm\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right] = \ldots = GMm\frac{h}{R\cdot(R+h)}$

Realizamos la aproximación $h \ll R$; $R+h \sim R$ $Ep_g \sim \frac{G\cdot M\cdot m\cdot h}{R^2} = m\cdot\frac{G\cdot M}{R^2}\cdot h = m\cdot g_0\cdot h$

Junio 2014. A.1

1. a) Explique las características del campo gravitatorio de una masa puntual.
b) Dos partículas de masas m y 2m están separadas una cierta distancia. Explique qué fuerza actúa sobre cada una de ellas y cuál es la aceleración de dichas partículas.

a) *Esta cuestión teórica (como suele ser costumbre últimamente en la ponencia de selectividad) es muy general y un tanto ambigua. Puede referirse a la magnitud campo gravitatorio ("gravedad", o "intensidad del campo gravitatorio" o "aceleración de la gravedad")* $\vec{g}$ *creado por una masa puntual, pero también puede entenderse como el concepto genérico de "campo gravitatorio", es decir, un epígrafe completo de la asignatura, en el que habría que hablar no sólo de la gravedad, sino de potencial gravitatorio, energía potencial gravitatoria, superficies equipotenciales, fuerza gravitatoria, relación campo-potencial... entendemos que esto último sería excesivamente largo para un apartado de una pregunta, que cuenta sólo 1,25 puntos. Nos centraremos sólo en el vector* $\vec{g}$ *.*

Dada una partícula de masa M, ésta "crea" una nueva propiedad en el espacio (una "deformación" de la geometría tetradimensional del espaciotiempo, según descubrió Einstein) a la que llamamos "gravedad" o "campo gravitatorio", y simbolizado por el vector $\vec{g}$. Al colocar una masa m a cierta distancia de M, surgirá una interacción entre ellas, que cumple con las leyes de Newton (ley de gravitación y principio de acción-reacción).

El campo gravitatorio creado por M tiene estas características:

- Es un campo vectorial.
- Es un campo central.
- Es un campo conservativo.
- Es directamente proporcional a la masa M que crea el campo.
- Disminuye con el cuadrado de la distancia a M.
- Indica la fuerza gravitatoria ejercida por unidad de masa sobre cualquier partícula m colocada a cierta distancia de M. Sus unidades en el Sistema Internacional: $N\,kg^{-1} = m\,s^{-2}$

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

$$módulo \quad g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

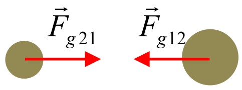
La constante G (cte de gravitación universal) $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\,m^2\,kg^{-2}$

b) Entre ambas partículas, separadas una distancia r, surge una interacción gravitatoria mutua, que viene dada por la ley de gravitación universal de Newton

$$\vec{F}_g = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\vec{u}_r \qquad \text{en módulo} \qquad F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

En este caso $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ Así $F_{g12} = F_{g21} = G \cdot \dfrac{m \cdot 2m}{r^2} = \dfrac{2Gm^2}{r^2}$

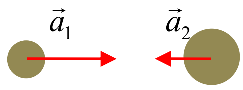
Ambas partículas sufren fuerzas de la misma intensidad, de igual dirección pero de signo contrario, como se indica en el esquema.



La aceleración que sufre cada partícula viene dada por la 2ª ley de Newton.

$$a_1 = \frac{F_{g21}}{m_1} = \frac{2Gm^2}{r^2 \cdot m} = \frac{2Gm}{r^2} \qquad a_1 = \frac{F_{g12}}{m_2} = \frac{2Gm^2}{r^2 \cdot 2m} = \frac{Gm}{r^2}$$

Las direcciones y sentidos vienen indicadas en el dibujo. Como vemos, la partícula 1, al tener la mitad de masa, sufre una aceleración doble que la partícula 2.



Junio 2014. B.3

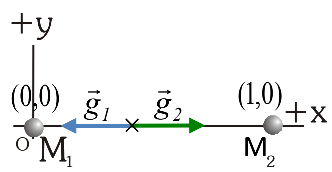
3. Dos masas puntuales de 5 y 10 kg, respectivamente, están situadas en los puntos (0,0) y (1,0) m, respectivamente.
a) Determine el punto entre las dos masas donde el campo gravitatorio es cero.
b) Calcule el potencial gravitatorio en los puntos A (-2,0) m y B (3,0) m y el trabajo realizado al trasladar desde B hasta A una masa de 1,5 kg. Comente el significado del signo del trabajo.
G = 6,67 ·10^{-11} N m^2 kg^{-2}

Nos encontramos ante dos masas puntuales que crean campo gravitatorio a su alrededor. En cualquier punto del espacio, el campo gravitatorio total se calcula aplicando el principio de superposición, es decir, el campo total en un punto es la suma de los dos campos gravitatorios individuales.

$$\vec{g}_P = \vec{g}_{1P} + \vec{g}_{2P} = -\frac{GM_1}{r_1^2}\vec{u}_{r1} - \frac{GM_2}{r_2^2}\vec{u}_{r2}$$

a) Para que el campo gravitatorio total sea cero, ambos vectores deben tener igual módulo, igual dirección y sentidos opuestos.

$\vec{g}_P = \vec{g}_{1P} + \vec{g}_{2P} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{g}_{1P} = -\vec{g}_{2P}$



El punto donde estas condiciones se cumplen debe estar en la línea que une ambas masas, y en la zona intermedia entre las mismas, como indica el dibujo. Además, se encontrará más cerca de la masa menor (la de 5 kg).

Igualando los módulos

$$\frac{GM_1}{r_1^2} = \frac{GM_2}{r_2^2} \quad \rightarrow \quad \frac{5\,kg}{r_1^2} = \frac{10\,kg}{r_2^2} \quad \rightarrow \quad r_2^2 = 2 \cdot r_1^2 \quad \rightarrow \quad r_2 = \sqrt{2} \cdot r_1$$

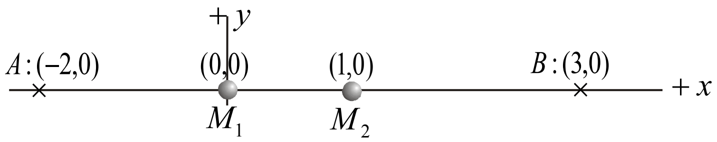
Vemos en el dibujo que ambas distancias r_1 y r_2 suman 1 m. $\quad r_1 + r_2 = 1m$

Resolviendo el sistema, tenemos que $r_1 + \sqrt{2} \cdot r_1 = 1 \quad \rightarrow \quad r_1 = 0{,}414m \quad \rightarrow \quad r_2 = 0{,}586m$

b) El campo gravitatorio es un campo conservativo. Eso significa, por una parte, que tiene una función potencial asociada en cada punto del espacio (potencial gravitatorio, V). Y por otro lado, que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria en un desplazamiento entre os puntos es independiente del camino elegido, sólo depende de los puntos inicial y final, y puede calcularse con la expresión $W_{Fg} = -\Delta Epg = -(Epg_f - Epg_i) = Epg_i - Epg_f$

El potencial creado por ambas masas puntuales en un punto se calcula nuevamente aplicando el principio de superposición

$$V = V_1 + V_2 = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2}$$



En el punto A:(-2,0)m

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} = -\frac{GM_1}{r_{1A}} - \frac{GM_2}{r_{2A}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{2} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{3} = -3{,}891 \cdot 10^{-10}\ J/kg$$

En el punto B:(3,0)m

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = -\frac{GM_1}{r_{1B}} - \frac{GM_2}{r_{2B}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{3} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{2} = -4{,}447 \cdot 10^{-10}\ J/kg$$

El trabajo entre el punto inicial B y el punto final A los calculamos con la expresión explicada arriba

$$W_{Fg} = -\Delta Epg = -(Epg_A - Epg_B) = Epg_B - Epg_A = m \cdot V_B - m \cdot V_A = m \cdot (V_B - V_A) =$$
$$= 1{,}5\,kg \cdot (-4{,}447 \cdot 10^{-10}\,J/kg - (-3{,}891 \cdot 10^{-10}\,J/kg)) = 1{,}5\,kg \cdot (-5{,}56 \cdot 10^{-11}\,J/kg) = -8{,}34 \cdot 10^{-11}\,J$$

El signo del trabajo es negativo, ya que la variación de energía potencial es positiva (el potencial es mayor en el punto final A que en el inicial B). Un trabajo negativo significa que el desplazamiento, globalmente, se realiza en contra de la fuerza gravitatoria. Por lo tanto, debemos realizar un trabajo externo al menos igual a 8,34 ·10^{-11} J para trasladar la masa de 1,5 kg desde B hasta A.

Junio 2013. B. 1

1. a) Explique qué es la velocidad orbital y deduzca su expresión para un satélite que describa una órbita circular en torno a la Tierra.
b) Dos satélites A y B de distintas masas ($m_A > m_B$) describen órbitas circulares de idéntico radio alrededor de la Tierra. Razone la relación que guardan sus respectivas velocidades y sus energías potenciales.

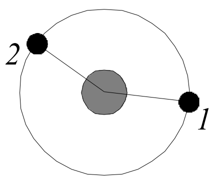
a) La velocidad orbital (v_{orb}) es la velocidad que lleva el satélite en su órbita. Es la velocidad necesaria para que el satélite mantenga una órbita circular a una distancia determinada *r*. Para calcularla, tendremos en cuenta que la única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria. $F_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$, donde *M* es la masa del planeta y *m* la del satélite. También, al tratarse de un movimiento circular, sólo tendrá aceleración normal.

Aplicando la segunda ley de Newton: $F_g = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{r}$

Igualando ambas expresiones: $$\frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Observamos que, a cada distancia *r* corresponde una velocidad determinada. Y que la velocidad orbital depende de la masa del planeta (astro central) pero no de la masa del satélite.

b) La velocidad de un objeto (satélite) que describe orbitas circulares en torno a un astro central (la Tierra en este caso) debido únicamente a la atracción gravitatoria, se denomina velocidad orbital, y se calcula con la expresión $v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ donde *M* es la masa de la Tierra, *r* la distancia desde el centro de masas del satélite hasta el centro de la Tierra y *G* la constante de gravitación universal. La masa del satélite m no influye en la velocidad orbital.



Por tanto, vemos que, como ambos satélites describen órbitas de idéntico radio, ambos llevarán la misma velocidad orbital, independientemente de su masa.

La energía potencial almacenada por el satélite debido a la acción de la fuerza gravitatoria viene dada por:

$Ep_g = -\frac{GMm}{r}$ donde *m* es la masa del satélite, escogiendo el nivel cero para r →∞

La energía potencial gravitatoria sí depende de la masa. La relación entre las Epg será:

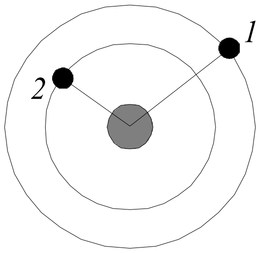
$$\frac{Ep_{gA}}{Ep_{gB}} = \frac{-\frac{GMm_A}{r}}{-\frac{GMm_B}{r}} = \frac{m_A}{m_B}$$ La relación es la misma que existe entre las masas de los satélites.

Junio 2012. A.1

1. a) Explique las características del campo gravitatorio terrestre.
b) Dos satélites idénticos están en órbita circular alrededor de la Tierra, siendo r_1 y r_2 los respectivos radios de sus Orbitas ($r_1 > r_2$). ¿Cuál de los dos satélites tiene mayor velocidad? ¿Cuál de los dos tiene mayor energía mecánica? Razone las respuestas.

a) Esta pregunta puede ser bastante larga, ya que corresponde a un apartado entero del tema de gravitación. En este texto nos limitaremos a enumerar los puntos que se podrían desarrollar, ya que no está claro qué preguntan concretamente.
- Características generales de la interacción gravitatoria, que evidentemente se cumplen para la Tierra, considerada como una esfera de masa $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg: atractiva, conservativa, central, líneas de campo y superficies equipotenciales, ley de gravitación de Newton…
- Magnitudes vectoriales (fuerza, gravedad) y escalares (potencial, energía potencial). Definición y expresiones para el exterior de la Tierra. Variación de la gravedad con la altura. Gravedad superficial. ¿Variación de la gravedad con la latitud, al no ser la Tierra una esfera perfecta?
- Aproximación de gravedad constante para una altura muy inferior al radio terrestre. La fórmula Epg = mgh frente a la fórmula general. Rango de validez.
- Velocidad de escape de la Tierra.
- Campo en el interior de la Tierra. Aplicación del teorema de Gauss. (¿?)

b) La velocidad de un objeto (satélite) que describe orbitas circulares en torno a un astro central (la Tierra en este caso) debido únicamente a la atracción gravitatoria, se denomina velocidad orbital, y se calcula con la expresión $v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ donde M es la masa de la Tierra, r la distancia desde el centro de masas del satélite hasta el centro de la Tierra y G la constante de gravitación universal.



Vemos que, como el primer satélite está a mayor distancia ($r_1 > r_2$), su velocidad orbital será menor, ya que G y M son las mismas en los dos casos.
Conclusión: <u>La velocidad orbital es mayor en el segundo satélite.</u>

La energía mecánica de un satélite es la suma de sus energías cinética y potencial gravitatoria:

$$E_M = Ec + Ep_g = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}$$ donde m es la masa del satélite

Sabemos que para una órbita circular, la velocidad es constante (velocidad orbital). Así.

$$E_M = Ec + Ep_g = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{GM}{r}} \right)^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

Considerando la expresión obtenida, vemos que a mayor distancia (r), mayor energía mecánica (menor en valor absoluto, peo hay que tener en cuenta el signo -)
Así, <u>el primer satélite poseerá mayor energía mecánica, ya que se encuentra a mayor distancia de la Tierra</u>.

Junio 2011. A.3

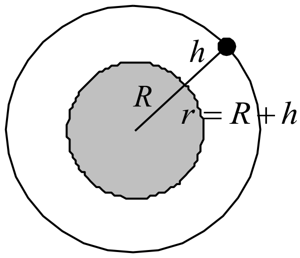
3. Un satélite artificial de 400 kg describe una órbita circular a una altura h sobre la superficie terrestre. El valor de la gravedad a dicha altura es la tercera parte de su valor en la superficie de la Tierra.

a) Explique si hay que realizar trabajo para mantener el satélite en esa órbita y calcule el valor de h.

b) Determine el periodo de la órbita y la energía mecánica del satélite.

$g = 9{,}8\ m\cdot s^{-2}$; $R_T = 6{,}4\cdot 10^6\ m$

a) Un satélite es un objeto que describe órbitas en torno a un astro, y cuyo movimiento está sometido únicamente a la fuerza gravitatoria. El satélite está constantemente en caída libre, solo que su trayectoria no choca con la Tierra. Una vez puesto en órbita, y suponiendo que no existe rozamiento, no es necesario realizar ningún gasto de energía (no hay que aportar energía mediante trabajo) para mantenerla. Ya que la única fuerza que actúa, la gravitatoria, es conservativa, la energía mecánica del satélite se mantendrá constante *($\Delta E_M = W_{FNC} = 0 \rightarrow E_M$ = cte)*. Si la órbita es elíptica, se producirá una transformación de energía potencial gravitatoria en cinética conforme se acerca a la Tierra, y de cinética en potencial gravitatoria conforme se aleja. Y si es circular, todas las energías del satélite se mantendrán constantes. No es necesario, por tanto, realizar ningún trabajo para mantener la órbita (como tampoco es necesario hacerlo con la Luna, por ejemplo).



En el caso que nos ocupa, el de una órbita circular, la aceleración gravitatoria (en módulo) que sufre el satélite se mantiene constante, y es igual a $g = \frac{GM_T}{r^2}$, donde M_T es la masa de la Tierra, G es la constante de gravitación universal, y r es el radio de la órbita, medido desde el centro de la Tierra.

(Nota: Existe un error, o al menos una imprecisión, en uno de los datos que nos proporcionan. Aparece $g = 9{,}8\ ms^{-2}$. Siendo tan conocido el dato de la gravedad superficial terrestre, se entiende que nos quieren decir el valor de g_0, o g_{Sup}, o $g(r=R_T)$, pero tal y como nos lo dicen, no significa eso. La magnitud g se usa para indicar el módulo del campo gravitatorio en cualquier punto)

Ya que nos dicen que la gravedad g en la órbita es la tercera parte que en la superficie (g_0)

$$g = \frac{g_0}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{GM_T}{r^2} = \frac{GM_T}{3R_T^{\,2}} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{3}\cdot R_T = 1{,}1085\cdot 10^7\ m$$

Y la altura *h* sobre la superficie será $h = r - R_T = 4{,}685\cdot 10^6\ m$

b) El periodo de revolución del satélite podemos calcularlo aplicando la tercera ley de Kepler al movimiento del mismo. *"La relación entre el cuadrado del periodo de revolución y el cubo del radio medio de la órbita, es una constante para todo satélite que describa órbitas en torno a un astro central."*

La constante depende de la masa del astro central (La Tierra en este caso) como demostró Newton.

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}}$$

La masa de la Tierra la calculamos a partir del dato de la gravedad superficial y del radio terrestre.

$$g_0 = \frac{GM_T}{R_T^{\,2}} \quad \rightarrow \quad M_T = \frac{g_0\cdot R_T^{\,2}}{G} = 6{,}018\cdot 10^{24}\ kg$$

Sustituyendo $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}} = 11574{,}29\ s \quad \approx \quad 3{,}22\ h$

La energía mecánica del satélite es igual a la suma de sus energías cinética y potencial gravitatoria

$$E_M = Ec + Ep_g = \frac{1}{2}m\cdot v_{orb}^{\ 2} - \frac{GM_T m}{r}$$

como la velocidad orbital es $v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$

$$E_M = Ec + Ep_g = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM_T}{r}}\right)^2 - \frac{GM_T m}{r} = \frac{1}{2}\frac{GM_T m}{r} - \frac{GM_T m}{r} = -\frac{GM_T m}{2r}$$

Sustituyendo, obtenemos $E_M = -1{,}448\cdot 10^{10}\ J$

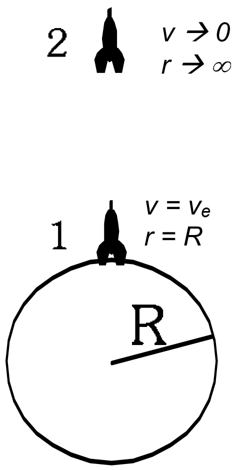
Junio 2010. A. 1.

1. a) Explique qué se entiende por velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión.
b) Razone qué energía habría que comunicar a un objeto de masa m, situado a una altura h sobre la superficie de la Tierra, para que se alejara indefinidamente de ella.

a) La velocidad de escape para un planeta se define como *la velocidad a la que habría que lanzar un cuerpo desde la superficie del planeta para que escapara de su atracción gravitatoria, alejándose indefinidamente*.
En este cálculo se desprecia el rozamiento con la atmósfera.

Resolvemos el problema empleando conceptos energéticos:

En primer lugar tenemos en cuenta que, al no tener en cuenta el rozamiento, la única fuerza que va a actuar sobre el movimiento del cohete será la gravitatoria, que es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica del cohete se mantendrá constante.



Datos: M, R: masa y radio del planeta m: masa del proyectil

Sistemas de referencia: mediremos las distancias desde el centro del planeta.
El origen de energía potencial gravitatoria lo colocamos a una distancia infinita del centro planetario, por lo que la expresión usada para la Epg será $Ep_g = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$

Consideraremos dos situaciones:

Inicial: Lanzamiento del cohete desde la superficie terrestre con velocidad v_e .

$$Ec_1 = \tfrac{1}{2} m v_e^{\,2} \qquad Ep_{g1} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

$$E_{M1} = Ec + Ep_g = \tfrac{1}{2} m v_e^{\,2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

Final: el cohete se aleja indefinidamente. En el límite cuando la distancia r tiende a infinito, la velocidad (y la Ec) tiende a cero, al igual que la energía potencial, ya que el origen de Ep está colocado en el infinito.

$$E_{M2} = \lim_{r \to \infty} E_M = \lim_{r \to \infty} (Ec + Ep_g) = 0$$

Aplicando la conservación de la energía mecánica:

$$E_{M1} = E_{M1} \Rightarrow \tfrac{1}{2} m v_e^{\,2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2} \cancel{m} v_e^{\,2} = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{R} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Si el lanzamiento se realiza desde una altura h sobre la superficie del planeta, la expresión queda

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}$$

b) Suponiendo que la energía es suministrada en un solo impulso inicial en forma de energía cinética, la calculamos a partir de la expresión

$$Ec = \tfrac{1}{2} m v_e^{\,2} = \tfrac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{2GM}{R+h}} \right)^2 = \frac{2GMm}{2(R+h)} = \frac{GMm}{(R+h)}$$

Que coincide con el valor de energía potencial gravitatoria en ese punto, pero con signo positivo. Debe ser así, ya que, conforme se aleja, la Ec disminuye, transformándose en Epg, ambas tendiendo a cero. Como la energía mecánica se conserva, se cumple que *ΔEc = - ΔEpg*

Junio 2009. A.1

1. a) Defina velocidad de escape de un planeta y deduzca su expresión.

b) Se desea colocar un satélite en una órbita circular a una altura h sobre la Tierra. Deduzca las expresiones de la energía cinética del satélite en la órbita y de la variación de su energía potencial respecto de la superficie de la Tierra.

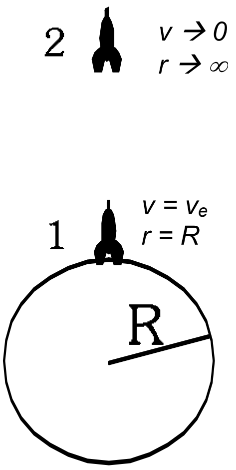
a) La velocidad de escape para un planeta se define como *la velocidad a la que habría que lanzar un cuerpo desde la superficie del planeta para que escapara de su atracción gravitatoria, alejándose indefinidamente*.

En este cálculo se desprecia el rozamiento con la atmósfera.

Resolvemos el problema empleando conceptos energéticos:

En primer lugar tenemos en cuenta que, al no tener en cuenta el rozamiento, la única fuerza que va a actuar sobre el movimiento del cohete será la gravitatoria, que es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica del cohete se mantendrá constante.

Datos: M, R: masa y radio del planeta
m: masa del proyectil



<u>Sistemas de referencia</u>: mediremos las distancias desde el centro del planeta.
El origen de energía potencial gravitatoria lo colocamos a una distancia infinita del centro planetario, por lo que la expresión usada para la Epg será $Ep_g = -\frac{G\cdot M\cdot m}{R}$

Consideraremos dos situaciones:

<u>Inicial:</u> Lanzamiento del cohete desde la superficie terrestre con velocidad v_e.

$$Ec_1 = \tfrac{1}{2} m v_e^{\,2} \qquad Ep_{g1} = -\frac{G\cdot M\cdot m}{R}$$

$$E_{M1} = Ec + Ep_g = \tfrac{1}{2} m v_e^{\,2} - \frac{G\cdot M\cdot m}{R}$$

<u>Final:</u> el cohete se aleja indefinidamente. En el límite cuando la distancia r tiende a infinito, la velocidad (y la Ec) tiende a cero, al igual que la energía potencial, ya que el origen de Ep está colocado en el infinito.

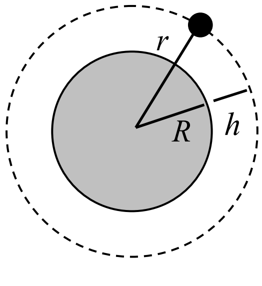
$$E_{M2} = \lim_{r\to\infty} E_M = \lim_{r\to\infty} (Ec + Ep_g) = 0$$

Aplicando la conservación de la energía mecánica:

$$E_{M1} = E_{M1} \Rightarrow \tfrac{1}{2} m v_e^{\,2} - \frac{G\cdot M\cdot m}{R} = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2} \cancel{m} v_e^{\,2} = \frac{G\cdot M\cdot \cancel{m}}{R} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

b) En una órbita circular, el satélite tiene un movimiento circular uniforme, con velocidad de módulo constante denominada velocidad orbital, y que se obtiene con la expresión

$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$ donde M y R son la masa y el radio de la Tierra, respectivamente.



La energía cinética se calcula

$$Ec = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{GM}{R+h}}\right)^2 = \frac{GMm}{2(R+h)}$$

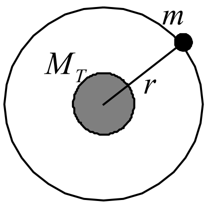
Al alejarse desde la superficie de la Tierra, la energía potencial del satélite aumenta debido a que la fuerza gravitatoria realiza un trabajo negativo sobre él. ($\Delta Epg = -W_{Fg} \rightarrow \Delta Epg > 0$). Suponiendo el nivel cero de energía potencial gravitatoria a una distancia infinita de la Tierra, la expresión de la energía potencial queda $Epg = -\frac{GMm}{r}$, donde r es la distancia al centro de la Tierra. Así

$$Epg_1 = -\frac{GMm}{R} \qquad Epg_2 = -\frac{GMm}{R+h}$$

$$\Delta Epg = Epg_2 - Epg_1 = -\frac{GMm}{R+h} + \frac{GMm}{R} = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = GMm\frac{R+h-R}{R\cdot(R+h)} = \frac{GMmh}{R\cdot(R+h)}$$

Junio 2008. A.3

3. Un satélite del sistema de posicionamiento GPS, de 1200 kg, se encuentra en una órbita circular de radio 3 R_T.
a) Calcule la variación que ha experimentado el peso del satélite respecto del que tenía en la superficie terrestre.
b) Determine la velocidad orbital del satélite y razone si la órbita descrita es geoestacionaria.
$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg ; R_T = 6400 km



a) En su órbita alrededor de la Tierra, el satélite está sometido únicamente a la acción de la fuerza gravitatotia que la Tierra ejerce sobre el mismo. Esta fuerza (el peso del satélite) viene dada por la ley de Gravitación de Newton.

$$F_{g\ órbita} = \frac{G\cdot M\cdot m}{r^2} = \frac{G\cdot M_T\cdot m}{(3R_T)^2} = \frac{G\cdot M_T\cdot m}{9R_T^{\ 2}} = \frac{F_{g\ sup}}{9}$$

Vemos que el peso del satélite se reduce a la novena parte del peso en la superficie terrestre.

Datos:
$r = 3\ R_T$ = 19200 km = $1,92 \cdot 10^7$ m
m = 1200 kg.

(También puede entenderse la variación como la diferencia numérica entre los pesos. Basta entonces con sustituir los valores para el caso de la superficie terrestre ($r = R_T$), dando un peso de 11724,6 N, y para el caso de la órbita ($r = 3\ R_T$), siendo el peso entonces de 1302,7 N. El peso disminuye en 10421,9 N.)

b) La velocidad del satélite en su órbita se calcula con la expresión

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{G\cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6,0\cdot 10^{24}}{3\cdot 6,4\cdot 10^6}} = 4565,5\ m\cdot s^{-1}$$

Un satélite geoestacionario se encuentra siempre sobre la vertical del mismo punto de la superficie terrestre. Para que esto ocurra, la órbita debe ser ecuatorial y su periodo de revolución debe ser igual al terrestre, es decir, de 1 día (86400 s). Esto hace que sólo exista una posible órbita para este tipo de satélites, con un radio de unos 42.000 km. No es este el caso del problema.

Calcularemos el periodo de revolución del satélite. Dado que se trata de un movimiento uniforme, podemos calcular este tiempo dividiendo la distancia recorrida (una vuelta = 2 · π · r) entre la velocidad que lleva (v_{orb}). Así

$$T = \frac{d}{v_{orb}} = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{v_{orb}} = 26423,6\ s\ (7,3\ h)$$ Por tanto, no puede ser geoestacionario.

Otra forma de calcularlo, es a partir de la aplicación de la 3ª ley de Kepler al movimiento del satélite.

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = 26423,6\ s$$

Junio 2007. A.3

3. Suponga que la masa de la Tierra se duplicara.

a) Calcule razonadamente el nuevo periodo orbital de la Luna suponiendo que su radio orbital permaneciera constante.

b) Si, además de duplicarse la masa terrestre, se duplicara su radio, ¿Cuál sería el valor de g en la superficie terrestre?

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km ; $R_{orbital\ Luna} = 1{,}74 \cdot 10^6$ m ***(Este último dato está mal: el radio orbital de la Luna es de aproximadamente 384400 km = 3,844 · 10^8 m. Han puesto el radio de la Luna, no el de su órbita. Si se sustituyera ese valor, los resultados del apartado a) serían completamente absurdos. Sin embargo, esto no afecta al apartado b))***

a) La relación entre el periodo orbital y el radio de la órbita de un satélite que describe órbitas en torno a un astro central viene dada por la tercera Ley de Kepler: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$

donde T es el periodo orbital del satélite, r es el radio de la órbita, y M la masa del cuerpo central (en este caso la Tierra). Suponemos en esta cuestión que la masa de la Tierra es $M = 2 \cdot 6 \cdot 10^{24}\ kg = 1{,}2 \cdot 10^{25}\ kg$

Despejando el periodo orbital: $T^2 = r^3 \cdot \frac{4\pi^2}{G \cdot M} = 1{,}67 \cdot 10^6\ s \approx 465 h \approx 19{,}4\ días$

El periodo de revolución disminuiría (en la realidad es de unos 28 días)

b) La gravedad superficial es el valor del campo gravitatorio creado por el planeta en su superficie. Admitiendo que la Tierra es una esfera, el campo gravitatorio que crea en su superficie viene dado por $g_0 = \frac{G \cdot M}{R^2}$, donde M y R son la masa y el radio del planeta, respectivamente. Al duplicar ambas magnitudes, la gravedad superficial será

$g_0' = \frac{G \cdot 2M}{(2R)^2} = \frac{2G \cdot M}{4 \cdot R^2} = \frac{g_0}{2}$ La gravedad superficial se reduciría a la mitad del valor actual.

Suponiendo un valor aproximado de $g_{0T} = 9{,}8$ m/s^2, la nueva gravedad superficial sería de 4,9 m/s^2.

Junio 2005. A.3

3. a) Razone cuáles son la masa y el peso en la Luna de una persona de 70 kg.
b) Calcule la altura que recorre en 3 s una partícula que se abandona, sin velocidad inicial, en un punto próximo a la superficie de la Luna y explique las variaciones de energía cinética, potencial y mecánica en ese desplazamiento.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_L = 7{,}2 \cdot 10^{22}$ kg ; $R_L = 1{,}7 \cdot 10^6$ m

Nos encontramos ante un problema de interacción gravitatoria.

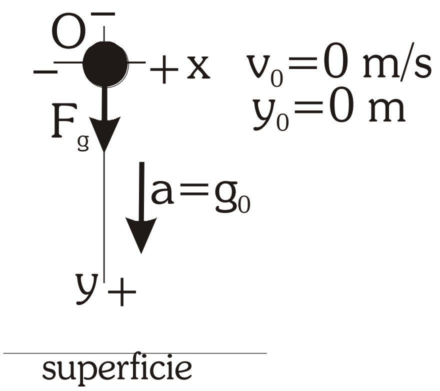
a) El concepto de masa corresponde a la cantidad de materia que posee el cuerpo. De hecho, es el dato que nos dan (70 kg), y esto es independiente (al menos en física clásica) del planeta en el que nos encontremos.
El peso de un objeto se define como la fuerza gravitatoria que sufre ese objeto por parte del planeta. Esta magnitud sí será diferente en la Tierra o en la Luna. El peso en la superficie de un planeta podemos calcularlo con la expresión, en módulo $F_g = m \cdot g_0$, donde g_0 es el valor de la gravedad superficial del planeta $g_0 = \frac{GM}{R^2}$, siendo M y R los valores de masa y radio del planeta respectivamente.

Así, la gravedad superficial en la Luna será $g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^{-2} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{22} kg}{(1{,}7 \cdot 10^6 m)^2} = 1{,}662 \frac{N}{kg}$

El peso de la persona en la Luna será $F_g = m \cdot g_0 = 70kg \cdot 1{,}662 \frac{N}{kg} = 116{,}34\ N$

Resultados: Masa: 70 kg Peso: 116,34 N

b) En un punto próximo a la superficie lunar (a una altura sobre la superficie mucho menor que el radio lunar), podemos considerar que la gravedad se mantiene constante durante el recorrido, con lo que la partícula describirá un movimiento uniformemente acelerado, rectilíneo en este caso, al partir con velocidad inicial nula.
Podremos aplicar entonces las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado.
$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$ Sólo se desplaza en el eje vertical
$y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

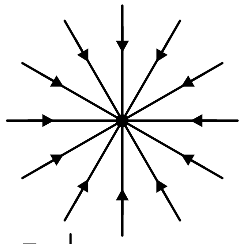


Escogemos el sistema de referencia y el criterio de signos que indica el dibujo.
Datos: $y_0 = 0\ m$ $v_0 = 0\ m/s$ $a = g_0 = 1{,}662\ m \cdot s^{-2}$.
Sustituyendo, la distancia vertical (altura) recorrida en t = 3 segundos será de $y = \frac{1}{2} 1{,}662 \cdot 3^2 = 7{,}479m \approx 7{,}5m$
Podemos comprobar que la aproximación realizada (altura mucho menor que el radio lunar) es correcta.

<u>Variaciones de energía en el desplazamiento</u>:
Debido a la atracción gravitatoria (fuerza conservativa), la partícula posee asociada una energía potencial gravitatoria. Considerando constante la fuerza gravitatoria, podemos usar la expresión $Ep_g = m \cdot g_0 \cdot h$, con origen establecido en la superficie terrestre. Esta energía disminuye al caer la partícula (disminuye h), La variación de energía potencial se corresponde con el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria (con signo puesto).
Debido a su movimiento respecto al sistema de referencia, posee energía cinética $Ec = \frac{1}{2} m \cdot v^2$. Al acelerar, la energía cinética aumenta.
La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial ($E_M = Ec + Ep_g$). La energía mecánica de la partícula se mantiene constante durante el desplazamiento, ya que la única fuerza que actúa sobre el sistema es conservativa.
En consecuencia, se produce una transformación de energía potencial gravitatoria en energía cinética. $\Delta Ec = -\Delta Ep_g$

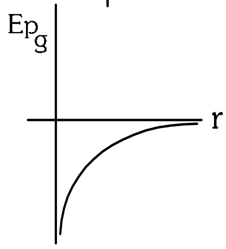
Junio 2005. B.1

1. Dibuje en un esquema las líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Sean A y B dos puntos situados en la misma línea de fuerza del campo, siendo B el punto más cercano a M.
a) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a B, ¿aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Por qué?
b) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a otro punto C, situado a la misma distancia de M que A, pero en otra línea de fuerza, ¿aumenta o disminuye la energía potencial? Razone su respuesta.



Las líneas de fuerza de un campo indican la dirección y sentido de la fuerza que ejerce el campo en cada punto del espacio. En el caso del campo gravitatorio, las masas son sumideros de campo, y las líneas tienen simetría radial como indica el dibujo. La masa M que crea el campo se encuentra en el centro.

a) La energía potencial almacenada por una partícula puntual de masa m en el interior del campo gravitatorio creado por M, viene dada por la expresión $Ep_g = -\frac{GMm}{r}$ escogiendo el origen de energía potencial a una distancia infinita de M.



En la gráfica del margen observamos cómo, al acercarnos a M, la energía potencial disminuye. Esto es lo que ocurre en el caso que nos ocupa, ya que el punto B está más cerca de M que el A. La energía potencial, por tanto, disminuye.

b) Basándonos en las mismas expresiones y gráficas del apartado anterior, vemos que, si ambos puntos están a la misma distancia *r* de la masa *M*, la energía potencial almacenada por la partícula m será la misma. El incremento de energía será cero. La energía almacenada no aumenta ni disminuye (considerando sólo los instantes inicial y final).
Explicado de otro modo: si ambos puntos está a la misma distancia, es que se encuentran en la misma superficie equipotencial. No habrá variación de Epg al hacer el traslado.