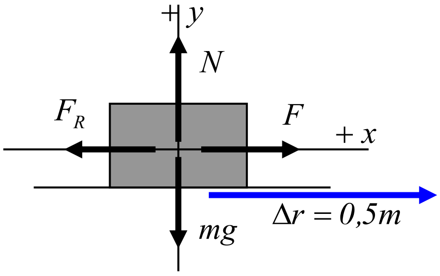
ALGUNOS EJERCICIOS RESUELTOS DEL TEMA 1. DINÁMICA DE LA PARTÍCULA (II)
(Del boletín de problemas)

Trabajo y energía.

23. Un bloque de 5 kg desliza con velocidad constante por una superficie horizontal mientras se le aplica una fuerza de 10 N, paralela a la superficie.

a) Dibujar en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque y calcule el trabajo realizado por las distintas fuerzas en un desplazamiento del bloque de 0,5 m.

b) Dibujar en otro esquema las fuerzas que actuarían sobre el bloque si la fuerza que se le aplica fuera de 30 N en una dirección que forma 60º con la horizontal, e indicar el valor de cada fuerza. Calcular la variación de energía cinética del bloque en un desplazamiento de 0,5 m.



a) Fuerzas que actúan sobre el bloque:
$Fg = m \cdot g = 49\ N$
$F = 10\ N$
Teniendo en cuenta que se mueve con velocidad constante, se cumple la primera ley de Newton $\Sigma\vec{F} = 0$, por lo que
$y)\quad N - mg = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg = 49\ N$
$x)\quad F - F_R = 0 \quad \rightarrow \quad F_R = F = 10\ N$

Con esto, podemos calcular el coeficiente de rozamiento, ya que $F_R = \mu \cdot N \rightarrow \mu = \frac{10\ N}{49\ N} = 0,2$

Trabajo realizado por las distintas fuerzas: Como las fuerzas aplicadas son constante, calculamos el trabajo con la expresión: $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot cos\alpha$

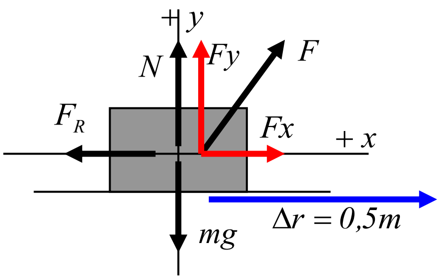
Fuerza gravitatoria: No realiza trabajo, al ser perpendicular al desplazamiento.

Normal: No realiza trabajo, al ser perpendicular al desplazamiento.

Fuerza de rozamiento: $W_{FR} = F_R \cdot \Delta r \cdot cos\,180^o = -F_R \cdot \Delta r = -10N \cdot 0,5m = -5\ J$

Fuerza aplicada: $W_F = F \cdot \Delta r \cdot cos\,0^o = F \cdot \Delta r = 10N \cdot 0,5m = 5\ J$

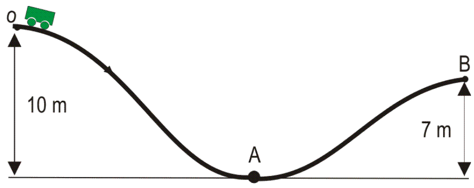
b) Calculamos las fuerzas en la nueva situación:



$Fg = mg = 49\ N$
$F_x = F \cdot cos60^o = 30N \cdot 0,5 = 15\ N$
$F_y = F \cdot sen60^o = 30N \cdot 0,866 = 25,98\ N$
En la dirección y se cumple que $\Sigma F_y = 0$, por lo que
$N + F_y - mg = 0 \rightarrow N = 49N - 25,98\ N = 23,02\ N$
Y la fuerza de rozamiento: $F_R = \mu \cdot N = 0,2 \cdot 23,02N = 4,6\ N$

Calculamos la variación de Ec en el desplazamiento de 0,5 m aplicando el teorema trabajo-energía cinética:
$\Delta Ec = W_{tot} \quad \rightarrow \quad \Delta Ec = W_{Fg} + W_N + W_F + W_{FR}$
Calculamos el trabajo realizado por cada fuerza
$W_F = F \cdot \Delta r \cdot cos\,60^o = 30N \cdot 0,5m \cdot 0,5 = 7,5\ J$
$W_N = W_{Fg} = 0$ ya que son perpendiculares al desplazamiento
$W_{FR} = F_R \cdot \Delta r \cdot cos180° = -4,6N \cdot 0,5m = -2,3\ J$

Así $\Delta Ec = W_{tot} = 7,5\ J - 2,3\ J = 5,2\ J$



25.- ¿Qué velocidad tendrá un vagón de una montaña rusa sin rozamiento en los puntos A y B de la figura, si el carrito parte de O con $v_0 = 0$ m/s ?

Al no existir rozamiento, las únicas fuerzas que tenemos aplicadas durante el movimiento del vagón son:
Fuerza gravitatoria (Fg = mg). Es conservativa.
Normal: Es no conservativa, pero no realiza trabajo, ya que actúa en perpendicular al desplazamiento en todo momento.

Como no hay aplicadas fuerzas no conservativas que realicen trabajo, la energía mecánica del vagón se mantendrá constante durante todo el recorrido. $E_M = Ec + Ep_g = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = cte$
Colocamos el origen de energía potencial gravitatoria en el suelo (*En h = 0 m* → *Epg = 0 J*)

Calculamos en primer lugar la energía mecánica en el punto O. (*la velocidad en O es cero, ya que parte del reposo*) $E_{MO} = Ec_O + Ep_{gO} = \frac{1}{2}mv_O{}^2 + mgh_O = 0 + mgh_O = mgh_O$

En el punto A, que está en el suelo, el vagón tendrá energía cinética pero no potencial (*h = 0 m*)
$E_{MA} = Ec_A + Ep_{gA} = \frac{1}{2}mv_A{}^2 + mgh_A$

Igualando las energías mecánicas en ambos puntos $\cancel{m}gh_O = \frac{1}{2}\cancel{m}v_A{}^2 + \cancel{m}gh_A$ (*la masa no influye*)

Sustituimos los valores ($h_O = 10$ m, $h_A = 0$ m, $g = 9,8$ m/s^2) despejamos el valor de v_A $v_A = 14$ m/s

Calculamos la velocidad en el punto B usando el mismo procedimiento
$E_{MO} = E_{MB} \rightarrow mgh_O = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$
Sustituimos los valores ($h_O = 10$ m, $h_B = 7$ m, $g = 9,8$ m/s^2) despejamos el valor de v_B $v_B = 7,67$ m/s

26. Un cuerpo se lanza hacia arriba por un plano sin rozamiento inclinado 30º con velocidad inicial 10 ms^{-1}.
a) Explique cómo varían las energías cinética, potencial y mecánica del cuerpo durante la subida.
b) ¿Cómo variaría la longitud recorrida si se duplica la velocidad inicial? ¿y si se duplica el ángulo del plano?

a) El cuerpo que se lanza hacia arriba por la rampa posee inicialmente energía cinética ($Ec_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$), que irá disminuyendo conforme sube hasta hacerse cero, por acción de la fuerza gravitatoria.
La energía potencial gravitatoria ($Ep_g = mgh$) aumenta con la altura. Si suponemos el nivel cero de energía potencial en el suelo, inicialmente no posee energía potencial gravitatoria.
La energía mecánica se mantiene constante, ya que en todo el movimiento no actúan fuerzas no conservativas que realicen trabajo. Sólo actúan el peso, que es conservativa, y la normal, que es no conservativa pero no realiza trabajo, al ser perpendicular al desplazamiento.

b) Aplicamos el principio de conservación de la energía. Como ya hemos explicado en el apartado anterior, la energía mecánica del cuerpo permanece constante durante la subida.

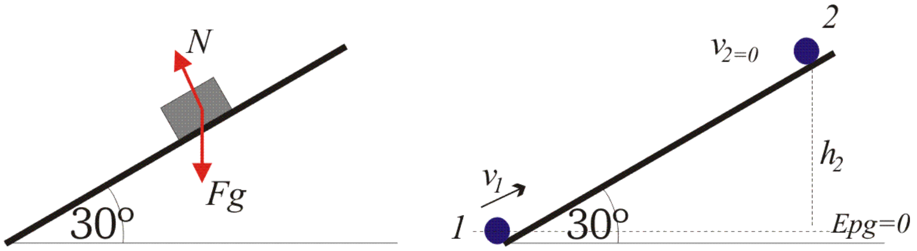
Inicial: El bloque sólo posee energía cinética $E_{M1} = Ec_1 + Ep_{g1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$
Final: El bloque sólo posee energía potencial $E_{M2} = Ec_2 + Ep_{g2} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = mgh_2$

$$E_{M2} = E_{M1} \quad \rightarrow mgh_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \rightarrow \quad h_2 = \frac{v_1^2}{2g}$$

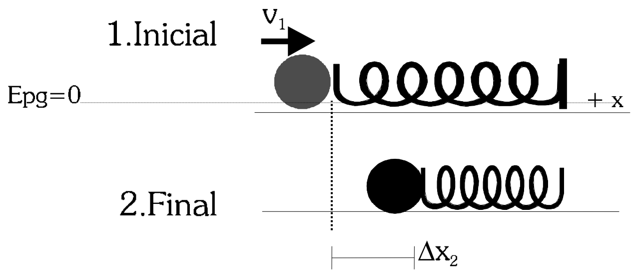
Relacionamos la altura con el desplazamiento por la rampa. $sen\alpha = \frac{h_2}{\Delta r}$

Así: $\Delta r = \frac{h_2}{sen\alpha} = \frac{v_1^2}{2g \cdot sen\alpha}$ con esta expresión podemos ver que:

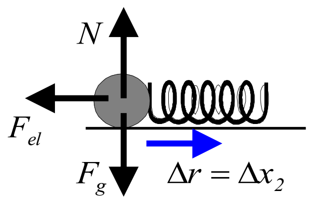
- Al duplicar la velocidad inicial (v_1), El desplazamiento por la rampa se cuadruplica.
- Al duplicar el ángulo, pasa a ser de 60º, en lugar de 30º. Ahora dividimos por 0,866, en vez de por 0,5. El resultado se hace menor (0,58 veces el valor original)



28. Un bloque de 5 kg se desliza por una superficie horizontal lisa con una velocidad de 4 m/s y choca con un resorte de masa despreciable y K = 800 N/m, en equilibrio y con el otro extremo fijo. Calcular:
a) Cuánto se comprime el resorte.
b) Desde qué altura debería caer el bloque sobre el resorte, colocado verticalmente, para producir la misma compresión



Datos: m = 5 kg , K = 800 N/m , μ = 0,2
Inicial: $v_1 = 4\ m/s$; $\Delta x_1 = 0\ m$
Final: $v_2 = 0\ m/s$; $\Delta x_2 = ?$



a)

Resolvemos el problema aplicando el principio de conservación de la energía mecánica. $\Delta E_M = W_{FNC}$

Las fuerzas que actúan en este desplazamiento son (al ser la superficie lisa no hay rozamiento):

Fuerza gravitatoria. Es conservativa. No realiza trabajo (actúa perpendicular al desplazamiento), por lo que la energía potencial gravitatoria no cambiará.

Fuerza elástica. Es conservativa. Realiza un trabajo negativo (se opone al desplazamiento), lo que hace que la energía potencial elástica del muelle aumente al comprimirse.

Normal: Es no conservativa, pero no realiza trabajo al ser perpendicular al desplazamiento.

Por lo tanto, el trabajo que realizan las fuerzas no conservativas es nulo, con lo que la energía mecánica del sistema se mantendrá constante. $E_{M2}=E_{M1}$

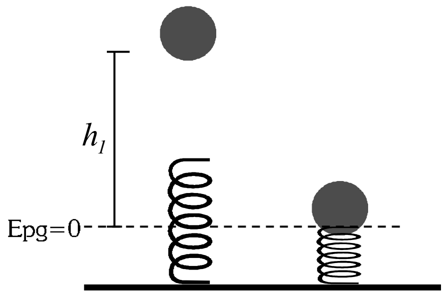
$$E_{M1} = Ec_1 + Ep_{g1} + Ep_{el1} = \tfrac{1}{2} m \cdot v_1^2 + mgh_1 + \tfrac{1}{2} K \cdot \Delta x_1^2 = \tfrac{1}{2} m \cdot v_1^2 + 0 + 0$$

$$E_{M2} = Ec_2 + Ep_{g2} + Epel_2 = \tfrac{1}{2} m \cdot v_2^2 + mgh_2 + \tfrac{1}{2} K \cdot \Delta x_2^2 = 0 + 0 + \tfrac{1}{2} K \cdot \Delta x_2^2$$

Igualando las energías mecánicas. $E_{M1} = E_{M2} \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{2} m \cdot v_1^2 = \tfrac{1}{2} K \cdot \Delta x_2^2 \quad \rightarrow \quad \Delta x_2 = \sqrt{\frac{m \cdot v_1^2}{K}} = 0{,}31\ m$

Se produce una transformación de energía cinética en energía potencial elástica, manteniéndose constante la energía mecánica. La energía cinética disminuye hasta hacerse cero.

b) Ahora las situaciones inicial y final son las que indica el esquema.
Datos: $h_1 = ?$; $\Delta x_1 = 0\ m$; $v_1 = 0\ m/s$
$h_2 = 0$; $\Delta x_2 = 0{,}31\ m$; $v_2 = 0\ m/s$



Ahora sólo actúan dos fuerzas, la gravitatoria y la elástica (no hay normal, ya que la bola no está en contacto con el suelo), y son ambas conservativas, por lo que la energía mecánica del sistema se mantendrá constante.
Así:

$$E_{M1} = Ec_1 + Ep_{g1} + Ep_{el1} = \tfrac{1}{2} m \cdot v_1^2 + mgh_1 + \tfrac{1}{2} K \cdot \Delta x_1^2 = 0 + mgh_1 + 0$$

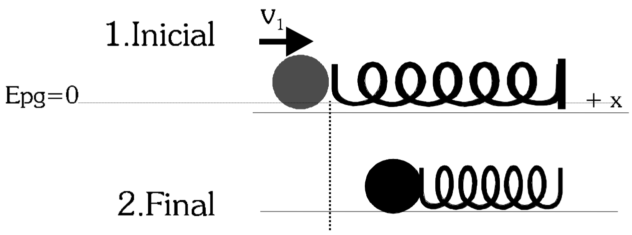
$$E_{M2} = Ec_2 + Ep_{g2} + Epel_2 = \tfrac{1}{2} m \cdot v_2^2 + mgh_2 + \tfrac{1}{2} K \cdot \Delta x_2^2 = 0 + 0 + \tfrac{1}{2} K \cdot \Delta x_2^2$$

Igualando las energías mecánicas inicial y final.

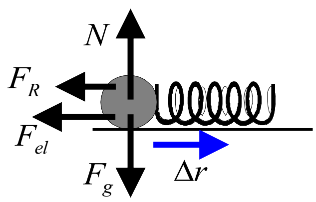
$$E_{M1} = E_{M2} \quad \rightarrow \quad mgh_1 = \tfrac{1}{2} K \cdot \Delta x_2^2 \quad \rightarrow \quad h_1 = \frac{K \cdot \Delta x_2^2}{2 \cdot mg} = 0{,}77\ m$$ (considerando g = 10 N/kg)

Esta altura está medida desde el punto más bajo que alcanza el bloque (compresión máxima del muelle), como indica el dibujo.

30. Un bloque de 5 kg desliza sobre una superficie horizontal. Cuando su velocidad es de 5 m s^{-1} choca contra un resorte de masa despreciable y de constante elástica K = 2500 N m^{-1}. El coeficiente de rozamiento bloque-superficie es 0,2.
a) Calcule razonadamente la longitud que se comprime el resorte
b) Tras la compresión máxima, el muelle vuelve a descomprimirse y el bloque sale despedido hacia atrás. Calcule la distancia que recorre el bloque hasta que se para.



Datos: m = 5 kg , K = 2500 N/m , μ = 0,2
Inicial: $v_1 = 5$ m/s ; $\Delta x_1 = 0$ m
Final: $v_2 = 0$ m/s ; $\Delta x_2 = ?$



a) Resolvemos el problema usando conceptos energéticos. Estudiamos el carácter conservativo o no de las fuerzas que actúan a lo largo del desplazamiento.
Fuerzas que actúan:
- Peso: $Fg = m \cdot g = 49\ N$. Es conservativa
- Normal: La calculamos haciendo $\Sigma Fy = 0 \Rightarrow N - Fg = 0 \Rightarrow N = Fg = 50N$. Es una fuerza no conservativa, pero no realiza trabajo durante el desplazamiento, ya que es perpendicular a éste.
- Fuerza de rozamiento: $F_R = \mu \cdot N$. Es una fuerza no conservativa, disipativa, y el trabajo que realiza hace disminuir la energía mecánica del cuerpo.
- Fuerza elástica ($\vec{F}_{el} = -K \cdot \Delta\vec{x}$). Es una fuerza conservativa.

Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica. $\Delta E_M = W_{FNC}$.
Vemos que existe una fuerza no conservativa, la de rozamiento, que realiza trabajo. La energía mecánica no se mantendrá constante.

Situación inicial: $E_{M1} = Ec_1 + Ep_{g1} + Ep_{el1} = \tfrac{1}{2} m \cdot v_1^2$

Situación final: $E_{M2} = Ec_2 + Ep_{g2} + Epel_2 = \tfrac{1}{2} K \cdot \Delta x_2^2$

$$W_{FR} = F_R \cdot \Delta r \cdot \cos 180^o = -F_R \cdot \Delta r = -\mu \cdot mg \cdot \Delta x_2$$

(el desplazamiento Δr coincide con la compresión final del muelle)

$$E_{M2} - E_{M1} = W_{FR} \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{2} K \cdot \Delta x_2^2 - \tfrac{1}{2} m \cdot v_1^2 = -\mu \cdot mg \cdot \Delta x_2$$

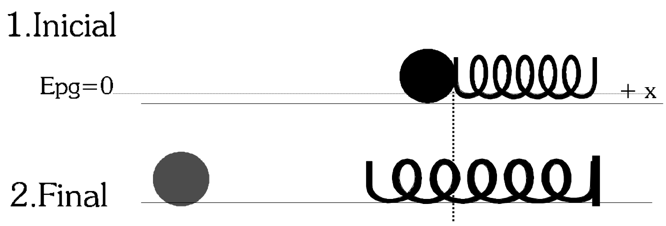
Sustituyendo los datos *(K = 2500 N/m ,m = 5 kg , v_1 = 5 m/s, g = 9,8 m/s²)*

$\frac{1}{2} \cdot 2500 \cdot \Delta x_2^2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5^2 = -0{,}2 \cdot 49 \cdot \Delta x_2$

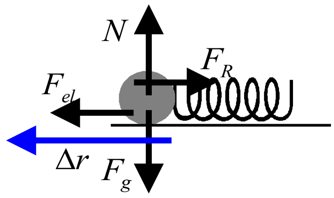
Tenemos una ecuación de segundo grado. Resolviéndola, obtenemos la compresión final del muelle

$\Delta x_2 = 0{,}22\ m$

b) Ahora, en la situación inicial, el muelle está en su compresión máxima y la bola quieta. Al descomprimirse, la bola se pone en movimiento y desliza por la superficie hasta pararse por el rozamiento. En la situación final, el muelle está descomprimido y la bola en reposo.



Actúan las mismas fuerzas que en apartado a), solo que ahora el desplazamiento es hacia la izquierda y la fuerza de rozamiento va hacia la derecha.



Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica. $\Delta E_M = W_{FNC}$.

Nuevamente vemos que existe una fuerza no conservativa, la de rozamiento, que realiza trabajo, disipando energía en forma de calor. La energía mecánica no se mantendrá constante.

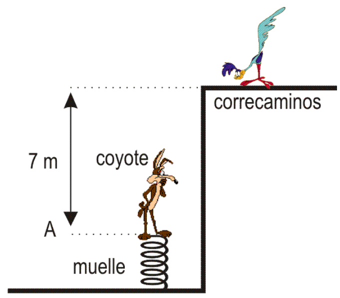
Inicial: $E_{M1} = Ec_1 + Ep_{g1} + Ep_{el1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 + \frac{1}{2}K\Delta x_1^2 = \frac{1}{2}K\Delta x_1^2$

Final: $E_{M2} = Ec_2 + Ep_{g2} + Ep_{el2} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 + \frac{1}{2}K\Delta x_2^2 = 0$

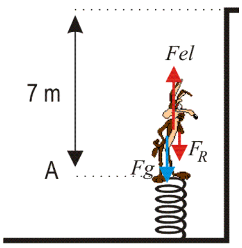
El trabajo de las fuerzas no conservativas: $W_{FNC} = W_N + W_{FR} = 0 - \mu mg \cdot \Delta r$

Así: $E_{M2} - E_{M1} = W_{FNC}$ $\rightarrow$ $0 - \frac{1}{2}K\Delta x_1^2 = -\mu mg \cdot \Delta r$ $\rightarrow$ $\Delta r = \frac{K\Delta x_1^2}{2\mu mg} = 6{,}17\ m$

31. En vista de su mala suerte, el coyote ha decidido atrapar al correcaminos alcanzándolo por sorpresa cuando pare a comer usando para ello un muelle marca ACME según el siguiente esquema:
Calcular hasta qué altura medida desde el punto A subirá el coyote si K= 7000 N/m, la masa del coyote es 50 kg, la fuerza de rozamiento entre el coyote y el aire puede suponerse constante y de 20 N y la compresión inicial del muelle es 1m. ¿Atrapará el coyote al correcaminos?
(*6,86 m. Evidentemente, no lo atrapa*.)



Resolvemos el problema aplicando el principio de conservación de la energía. Consideramos que el coyote atrapará al correcaminos si sube más de los 7 m de altura desde el punto A.



Fuerzas que actúan sobre el coyote:
- Gravitatoria: *Fg = m·g = 490 N*. Es conservativa
- Elástica: ($\vec{F}_{el} = -K \cdot \Delta\vec{x}$). Es una fuerza conservativa.
- Fuerza de rozamiento: F_R = *20 N*. Es una fuerza no conservativa, que realiza trabajo, disipando energía en forma de calor.

La energía mecánica del coyote no se va a conservar, ya que hay una fuerza no conservativa que realiza trabajo.
Inicialmente el coyote está en reposo ($v_1 = 0$), el muelle comprimido ($\Delta x_1 = 1\ m$) y la altura es cero ($h_1 = 0$), ya que hemos colocado el nivel cero de energía potencial gravitatoria en el punto A.
En la situación final, el coyote alcanza su altura máxima (h_2), su velocidad es cero ($v_2 = 0$), y el muelle está descomprimido ($\Delta x_2 = 0$)

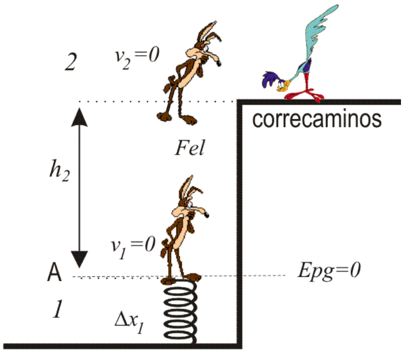
Así:

Inicial: $E_{M1} = Ec_1 + Ep_{g1} + Ep_{el1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 + \frac{1}{2}K\Delta x_1^2 = \frac{1}{2}K\Delta x_1^2$

Final: $E_{M2} = Ec_2 + Ep_{g2} + Ep_{el2} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 + \frac{1}{2}K\Delta x_2^2 = mgh_2$

El trabajo de las fuerzas no conservativas:

$W_{FNC} = W_{FR} = -F_R \cdot \Delta r = -F_R \cdot h_2$



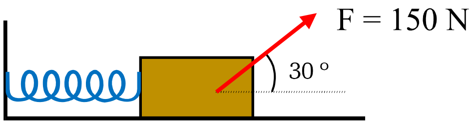
$E_{M2} - E_{M1} = W_{FNC}$ → $mgh_2 - \frac{1}{2}K\Delta x_1^2 = -F_R \cdot h_2$ →

sustituimos $490 \cdot h_2 - 3500 = -20 \cdot h_2$ →

$h_2 = 6{,}86\ m$

Evidentemente, no lo atrapa

32. Un bloque de 20 kg se encuentra sobre una superficie horizontal soldado a uno de los extremos de un resorte de K = 100 N/m, en equilibrio y con el otro extremo fijo. Se tira del bloque con una fuerza de 150 N en una dirección que forma un ángulo de 30º con la horizontal hasta desplazar el bloque una longitud de 0,5 m. Si el coeficiente de rozamiento es 0,4 , calcule el trabajo de la fuerza de rozamiento, y la velocidad final del bloque.

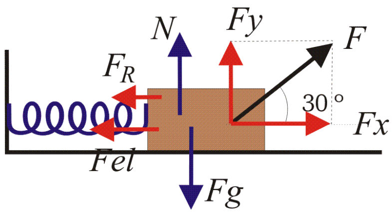


Fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

- Gravitatoria: $Fg = m \cdot g = 196\ N$. Es conservativa
- Elástica: ($\vec{F}_{el} = -K \cdot \Delta\vec{x}$). Es una fuerza conservativa.
- Fuerza aplicada ($F = 150\ N$). Es no conservativa. Realiza trabajo, aportando energía mecánica al bloque.

  Descomposición: $Fx = F \cdot \cos 30^o = 130\ N$

  $Fy = F \cdot sen 30^o = 75\ N$



- Normal: Es no conservativa, pero no realiza trabajo, al ser perpendicular al desplazamiento.

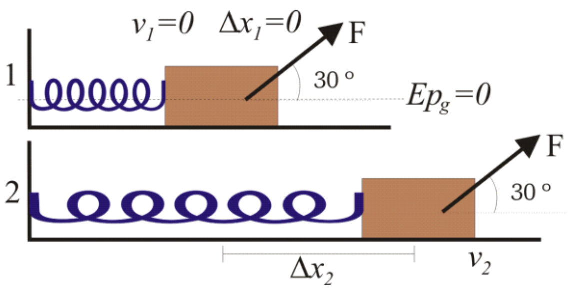
  La calculamos haciendo $\Sigma Fy = 0$ → $N + Fy - Fg = 0$ → $N = Fg - Fy = 121\ N$

- Fuerza de rozamiento: $F_R = \mu \cdot N = 0{,}4 \cdot 121\ N = 48{,}4\ N$. Es una fuerza no conservativa, que realiza trabajo, disipando energía en forma de calor.

Trabajo realizado por la fuerza de rozamiento: $W_{FR} = F_R \cdot \Delta r \cdot cos180º = -F_R \cdot \Delta r = -48{,}4\ N \cdot 0{,}5\ m = -24{,}2\ J$

Calculamos la velocidad final aplicando el principio de conservación de la energía mecánica: $\Delta E_M = W_{FNC}$.

Inicialmente el bloque está en reposo ($v_1 = 0$), el muelle descomprimido ($\Delta x_1 = 0$) y la altura es cero ($h_1 = 0$), ya que hemos colocado el nivel cero de energía potencial gravitatoria en suelo. En la situación final, el bloque se mueve ($v_2 = ?$), el muelle está estirado ($\Delta x_2 = \Delta r = 0{,}5\ m$), y la altura es cero.



Inicial: $E_{M1} = Ec_1 + Ep_{g1} + Ep_{el1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 + \frac{1}{2}K\Delta x_1^2 = 0$

Final: $E_{M2} = Ec_2 + Ep_{g2} + Ep_{el2} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 + \frac{1}{2}K\Delta x_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}K\Delta x_2^2$

El trabajo de las fuerzas no conservativas: $W_{FNC} = W_{FR} + W_N + W_F = -24{,}2\ J + 0 + 65\ J = 40{,}8\ J$

$W_F = F \cdot \Delta r \cdot cos30º = 150N \cdot 0{,}5m \cdot cos30º = 65\ J$

$E_{M2} - E_{M1} = W_{FNC}$ → $\left(\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}K\Delta x_2^2\right) - 0 = 40{,}8\ J$ → $v_2 = 1{,}68\ ms^{-1}$