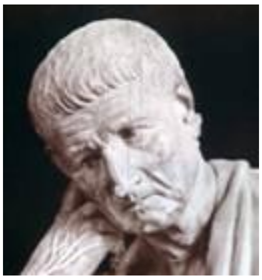
Tema 1: Dinámica de la partícula

Introducción histórica.
1. Concepto de fuerza. Leyes de Newton.
2. Fuerzas de especial interés.
3. Sistemas de referencia inerciales y no inerciales.
4. Cantidad de movimiento. Conservación.
5. Momento angular. Momento de una fuerza.
6. Energía. Tipos.
7. Trabajo. Teorema trabajo-energía cinética.
8. Fuerzas conservativas. Energía potencial.
9. Energía mecánica. Conservación.

Introducción histórica.

La observación y el estudio de los movimientos (tanto de los cuerpos terrestres como de los celestes) ha atraído la atención del hombre desde tiempos remotos. Así, es precisamente en la antigua Grecia donde tiene su origen la sentencia “Ignorar el movimiento es ignorar la naturaleza”, que refleja la importancia capital que se le otorgaba al tema. Siguiendo esta tradición, científico y filósofos observaron los movimientos de los cuerpos y especularon sobre sus características.

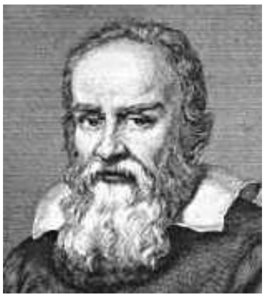


En la Antigua Grecia, las principales ideas sobre la naturaleza las encontramos en **Aristóteles** (s. IV a.C.)
El estudio de la naturaleza de Aristóteles parte de la observación de los fenómenos para, a partir de ahí, deducir sus causas a partir de primeros principios. No es un estudio “científico” como entendemos actualmente, ya que no exige la comprobación experimental de las conclusiones obtenidas. Se da mayor importancia a la coherencia del razonamiento y al “sentido común”, aunque en ocasiones se contradiga con la experiencia.
Aristóteles basa sus razonamientos sobre la naturaleza en dos principios, básicamente:
- La teoría de los cuatro elementos: Cualquier sustancia en la naturaleza está constituida por mezcla de cuatro elementos básicos: tierra, agua, aire y fuego. Establece un quinto elemento para los cielos, el éter, que es eterno e inmutable.
- El principio de finalidad (teleología): Todo cambio en la naturaleza tiene una finalidad, el perfeccionamiento de la misma.

Así, en cuanto al movimiento (un cambio de lugar), Aristóteles establece que el estado natural de un cuerpo es el reposo. Cuando se mueve es porque se le esté forzando o porque intenta ir hacia un sitio mejor, por afinidad con el elemento del que está formado (una piedra tiende a ir hacia la tierra, el fuego tiende a subir hacia el fuego supremo que es el Sol). De este modo se distinguen:
- Movimientos naturales
  - Cuerpos celestes: Movimiento circular (considerado el movimiento perfecto)
  - Cuerpos terrestres (imperfectos): Movimiento hacia lo que le es propio. Son movimientos uniformes de caída (cuerpos graves) o subida (cuerpos ligeros).
- Movimientos forzados: Ocurren de forma no natural, cuando empujamos o tiramos de algo. Desaparecen cuando cesa la causa (fuerza). El rozamiento no es incluido como una fuerza aplicada, sino sólo como un impedimento al movimiento, ocasionado por la imperfección de los cuerpos terrestres.

Esta descripción del movimiento es muy limitada, y muchas veces se contradice con la experiencia Por ejemplo, no explica el hecho de que una piedra siga subiendo después de soltarla (propone que el aire que rodea a la piedra sigue impulsándola). Ya algunos seguidores critican y modifican la teoría, pero lo fundamental del pensamiento de Aristóteles se sigue manteniendo durante la Antigüedad y buena parte de la Edad Media.

En el s.XIV, con la aparición de las primeras universidades, ligadas a la Iglesia, aumentan los debates críticos sobre las teorías aristotélicas. El escolástico **Jean Buridan** propone el concepto de ímpetus (algo a medio camino entre fuerza e inercia) para explicar el movimiento de la piedra al lanzarla. En el s.XVI, los españoles **Juan de Celaya** y **Domingo de Soto** llegan a anticipar lo que luego será la ley de inercia de Newton, y muestran que la caída de los cuerpos se hace con aceleración constante, influyendo en Galileo.



Ya en el siglo XVII, **Galileo Galilei** (1564-1642), basándose en la experiencia y el razonamiento (y no en la autoridad de pensadores anteriores), propone que el movimiento es un estado tan natural como el del reposo, y que no es necesaria la acción de una fuerza para que un cuerpo permanezca en movimiento. El efecto de la fuerza que apliquemos será un cambio en dicho movimiento (ya sea para aumentar su rapidez, frenarlo o desviarlo). Un cuerpo sobre el que no se aplique ninguna fuerza permanecerá en el estado en que se encuentre, ya sea de reposo o de movimiento, tiene tendencia a continuar en su estado, ya sea de reposo o de movimiento).

Además de estudiar los movimientos de caída rectilíneos y parabólicos, Galileo descubre los satélites de Júpiter, defiende el sistema Heliocéntrico de Copérnico (por lo que es perseguido por la Iglesia) y desecha la clasificación de movimientos naturales y forzados, incluso para los cuerpos celestes, dejando claro el camino a **Isaac Newton** para el descubrimiento de la ley de la gravedad y de las leyes de la dinámica.

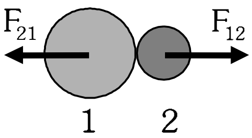
Posteriormente, la descripción y explicación de las fuerzas eléctricas (s XVIII) y magnéticas (s. XIX), y las fuerzas nucleares fuerte y débil en el s. XX, completan la descripción actual que tenemos acerca de la dinámica.

1. Concepto de Fuerza. Leyes de Newton

Fuerza: Es una magnitud vectorial que mide la intensidad de la interacción entre dos cuerpos.

De la definición anterior podemos extraer las características generales que cumplen las fuerzas:

- Siempre que exista una interacción entre dos cuerpos (es decir, que un cuerpo actúe sobre otro), se ejercerán fuerzas entre ambos cuerpos. Por ejemplo, choques, contactos, rozamientos, atracción gravitatoria, atracciones o repulsiones eléctricas y magnéticas... Para que exista interacción no es necesario que los cuerpos estén en contacto.
- Los cuerpos **no tienen** fuerza por sí mismos. **Ejercen fuerzas al interaccionar con otros**. Al finalizar la interacción, por tanto, también dejan de ejercerse estas fuerzas.
- Para que se ejerzan fuerzas son necesarios dos cuerpos que interaccionen. El primer cuerpo ejercerá una fuerza sobre el segundo, y el segundo ejercerá una fuerza sobre el primero. Ambas fuerzas son iguales y de sentido contrario.



Las fuerzas, como magnitudes vectoriales, se representan por vectores (módulo, dirección, sentido). El punto de aplicación de la fuerza se coloca sobre el cuerpo que sufre la fuerza.

Las diferentes fuerzas que actúen sobre un cuerpo pueden sumarse (vectorialmente). El resultado de sumar todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo se denomina **resultante** del sistema de fuerzas ($\Sigma\vec{F}$).

Sólo tiene sentido sumar las fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo, ya que son estas las que influirán en su movimiento.

Unidades: La unidad de fuerza en el Sistema Internacional de unidades es el Newton (N).
Otras unidades, ya en desuso:

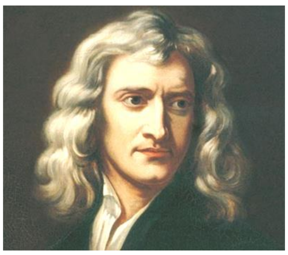
Sistema técnico:	kilopondio (kp);	1 kp = 9.8 N ~ 10 N.
Sistema CGS:	dina	1 dina = 10^{-5} N

Efectos de las fuerzas: Las fuerzas pueden producir dos efectos posibles en los cuerpos:
-Deformaciones
-Cambios en el movimiento (aceleraciones)

A lo largo de este tema nos dedicaremos a estudiar fundamentalmente el segundo de los efectos, ya que consideraremos a los cuerpos como partículas puntuales, sin forma ni tamaño, con lo que no tendría sentido hablar de deformación.

Leyes de Newton:

Fueron propuestas, junto con las definiciones de masa y fuerza, por Isaac Newton (1642-1727) en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Principios matemáticos de la filosofía natural), publicada en 1686.



1ª LEY: (LEY DE INERCIA) (1^er^ PRINCIPIO DE LA DINÁMICA):

"*Todo cuerpo tiende a continuar en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme a menos que sobre él actúe una fuerza neta que le obligue a cambiar este movimiento.*"

La fuerza neta será la resultante (la suma) de todas las fuerzas que actúen sobre el cuerpo. Podemos expresar también esta ley diciendo que "*Siempre que* $\Sigma\vec{F} = 0$, *el cuerpo mantiene su estado de movimiento*" (y siempre que el cuerpo mantenga su estado, es porque $\Sigma\vec{F} = 0$, estará en equilibrio, ya sea estático o dinámico)

Esta tendencia que tiene el cuerpo a continuar en el estado que estaba fue llamada *vis inertiae* (actualmente *inercia*) por Newton. Hay que resaltar que la inercia no es ninguna fuerza, es simplemente la tendencia que tiene cualquier cuerpo a continuar tal y como estaba, hasta que lo obliguemos a cambiar. La inercia de un cuerpo depende fundamentalmente de la masa que éste tenga. A mayor masa, más difícil será modificar su movimiento.

2ª LEY: (RELACIÓN CAUSA-EFECTO) (2º PRINCIPIO DE LA DINÁMICA)

"*El cambio de movimiento (aceleración) originado en una partícula es proporcional a la resultante de las fuerzas aplicadas sobre la partícula, y va en la misma dirección y sentido que dicha resultante.*"

Lo dicho anteriormente puede resumirse mediante una fórmula que relaciona el efecto (la aceleración) con la causa que la ha producido (la fuerza resultante). La constante que relaciona ambas magnitudes es la masa del cuerpo.

$$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad\qquad \vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m}$$

Esta expresión es la que utilizaremos en la mayoría de los problemas. De ella se pueden extraer varias conclusiones:

- Usando unidades del S.I, vemos que $1\ N = 1\ kg \cdot 1\ ms^{-2}$, es decir $[\ N = kg \cdot m \cdot s^{-2}\ ]$
- La dirección y sentido de la aceleración coinciden con las de la fuerza resultante.
- La expresión nos está indicando una relación entre vectores. Es decir, si nos encontramos ante un problema en dos dimensiones, tendremos dos componentes de la ecuación (y tres componentes en un problema en el espacio).

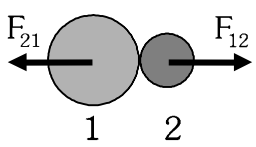
$$\Sigma F_x = m \cdot a_x$$
$$\Sigma F_y = m \cdot a_y$$

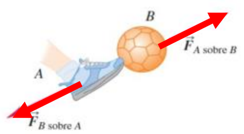
- De esta segunda ley puede obtenerse la primera (ley de inercia) como un caso particular. Si hacemos que $\Sigma\vec{F}$ sea cero, la aceleración también será cero, con lo que el movimiento no cambiará (seguirá tal como estaba).
- Una misma fuerza no tiene por qué producir siempre el mismo efecto. Dependerá del cuerpo sobre el que esté aplicado (de su masa), y de otras fuerzas que estén aplicadas sobre el mismo.

3ª LEY: (PRINCIPIO DE ACCIÓN-REACCIÓN) (3^er^ PRINCIPIO DE LA DINÁMICA)

"*En toda interacción entre dos cuerpos, se ejercen dos fuerzas, una aplicada sobre cada cuerpo, que son iguales en módulo y dirección, y en sentidos contrarios*".

Lo que quizá más pueda sorprendernos de esta tercera ley es el hecho de que las dos fuerzas tengan el mismo valor. Es decir, si le damos una patada a un balón, el balón ejerce sobre nuestro pie una fuerza igual. Si la Tierra nos atrae, nosotros atraemos a la Tierra con la misma fuerza. ¿Por qué entonces los cuerpos caen y la Tierra no sube? ¿Por qué el balón sale disparado y nuestro pie no sale rebotado hacia atrás? La razón hay que buscarla en la segunda ley. Las fuerzas que actúan son iguales, pero los efectos que producen (las aceleraciones) dependen también de la masa. La Tierra tiene una masa tan enorme que la aceleración que sufre es insignificante, inapreciable. El balón tiene mucha menos masa que nuestra pierna, y sufre más aceleración (la pierna también se ve frenada en su movimiento, debido a la acción de la fuerza que le ejerce el balón).

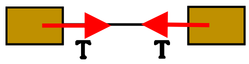




2. Fuerzas de especial interés:

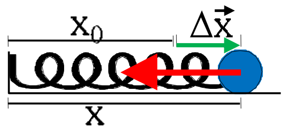
Peso: Fuerza que ejerce la Tierra (o el planeta que se esté estudiando) sobre un cuerpo. Su dirección y sentido apuntan hacia el centro del planeta. $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$

Tensión: Fuerza que ejerce un hilo (cuerda, cable) tenso sobre sus extremos.
Para una misma cuerda, el valor de T es el mismo en ambos extremos.



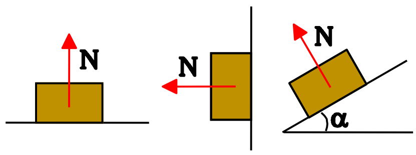
(La tensión siempre va hacia dentro de la cuerda. Impide que los cuerpos se separen, pero no que se junten. Si en algún momento T=0, la cuerda deja de estar tensa)

Fuerza elástica: La ejercen los cuerpos elásticos sobre sus extremos al deformarlos.
Es proporcional al desplazamiento y se opone a éste. $\vec{F}_e = -K \cdot \Delta\vec{x}$



FUERZAS DEBIDAS AL CONTACTO CON LA SUPERFICIE:

Normal: Respuesta del plano a todas las fuerzas perpendiculares a él.
Cálculo: $\Sigma\vec{F}_\perp = 0$ si no hay movimiento en ese eje.



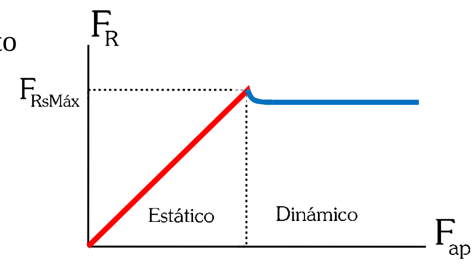
(La normal siempre va hacia fuera del plano. Si en algún momento N=0, el cuerpo deja de tener contacto con la superficie)

Fuerza de rozamiento: Debida a la rugosidad de las superficies en contacto

F Roz. estática: Mientras el cuerpo no se mueve $F_R = F_{aplicada}$

En el límite $F_{RsMAX} = \mu_s \cdot N$

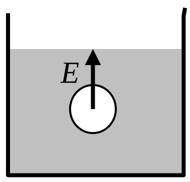
F Roz. dinámica: Cuando se produce un deslizamiento $F_R = \mu \cdot N$



FUERZAS EJERCIDAS POR FLUÍDOS

Empuje de Arquímedes: Fuerza vertical ejercida por un fluido (líquido o gas) sobre un cuerpo sumergido en él.

$$E = V_{sum} \cdot d_{fluido} \cdot g$$



3. Sistemas de referencia inerciales y no inerciales

Un sistema de referencia es inercial si está en reposo o se mueve con MRU ($\vec{v}$ =cte) respecto a un sistema de referencia que esté en reposo. Un observador situado en un SR inercial mide correctamente las fuerzas aplicadas sobre los cuerpos y aplica correctamente las leyes de Newton.

Un sistema de referencia es no inercial si se mueve con aceleración respecto a un SR en reposo. Debido a esta aceleración, un observador situado en él mide efectos que no puede explicar con las leyes de Newton (teniendo en cuenta que el observador no es consciente de que se mueve). Debe inventarse fuerzas que no son reales, no las aplica ningún cuerpo (las llamamos "fuerzas de inercia").
Ejemplos:
- Un autobús que frena bruscamente. Los pasajeros notan "un empujón" hacia delante.
- El autobús toma una curva pronunciada. Los pasajeros notan una "fuerza centrífuga" hacia fuera de la curva.
- Los astronautas de una nave espacial en órbita notan ingravidez aparente, como si la Tierra no ejerciera fuerza.
- "Fuerza" de Coriolis: Todo objeto que se mueva en la Superficie de la Tierra nota "una fuerza hacia la derecha" en el hemisferio norte y "hacia la izquierda" en el hemisferio sur (así se forman las borrascas, huracanes, remolinos…)

4. Cantidad de movimiento (o *momento lineal*) ($\vec{p}$). Conservación.

Indica la intensidad de un movimiento, la tendencia que tiene un cuerpo a continuar con su movimiento en línea recta. Depende de la inercia (masa) y de la velocidad.

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ Unidades $[p] = kg \cdot m \cdot s^{-1}$

La cantidad de movimiento varía debido a la acción de las fuerzas que actúen sobre el cuerpo.

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$ Si la masa es constante $\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \Sigma\vec{F}$ $\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F}$

<u>Principio de conservación de la cantidad de movimiento:</u> Si $\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{p} = cte$ (equivale a la 1ª ley de Newton)

Impulso: Indica el efecto que tiene la aplicación de una fuerza durante un intervalo de tiempo.

$\vec{I} = \int \vec{F} \cdot dt$ Si $\vec{F}$ es constante $\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{p}$ $[I] = N \cdot s$

Aplicación de la conservación de $\vec{p}$

Cuando se produce una colisión (choque entre dos cuerpos) o una explosión (varios cuerpos estaban juntos y se separan), podemos usar la conservación de la cantidad de movimiento para estudiar el problema, teniendo en cuenta estas consideraciones:

- Estudiamos los diferentes fragmentos como partes de un mismo cuerpo (es decir, estudiamos el cuerpo como si fuera uno solo). De este modo, al sumar las fuerzas que se ejercen mutuamente durante la interacción, la resultante será nula.
- Consideramos que la colisión o la explosión ocurren muy rápidamente, de manera que las fuerzas externas (gravedad, etc) apenas han modificado el movimiento del sistema durante la interacción.

De esta forma, es una muy buena aproximación el considerar que la cantidad de movimiento total es la misma justo antes y justo después de la interacción (choque o explosión) $\Sigma\vec{p}_{inicial} = \Sigma\vec{p}_{final}$

Colisiones elásticas e inelásticas:

En una colisión, además de la cantidad de movimiento, debemos tener en cuenta la energía cinética $(Ec = \frac{1}{2}mv^2)$ de las partículas. En el choque, pueden producirse deformaciones que absorben parte de la energía.

- **Colisión elástica:** Los dos cuerpos son perfectamente elásticos. No se pierde energía en la colisión. Además de la cantidad de movimiento total, se conserva la energía cinética total.

$\Sigma\vec{p}_{inicial} = \Sigma\vec{p}_{final} \rightarrow \mathrm{m}_1 \cdot \vec{v}_{1i} + \mathrm{m}_2 \cdot \vec{v}_{2i} = \mathrm{m}_1 \cdot \vec{v}_{1f} + \mathrm{m}_2 \cdot \vec{v}_{2f}$

$\Sigma Ec_{inicial} = \Sigma Ec_{final} \rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{m}_1 \cdot v_{1i}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m}_2 \cdot v_{2i}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{m}_1 \cdot v_{1f}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m}_2 \cdot v_{2f}^2$

En una sola dimensión, estas ecuaciones tienen una solución única (2 ecuaciones con dos incógnitas). En dos o tres dimensiones, tenemos 3 ecuaciones con 4 incógnitas, o 4 ecuaciones con 6 incógnitas, respectivamente. Las soluciones son múltiples, dependiendo de las condiciones del choque (parámetro de impacto).

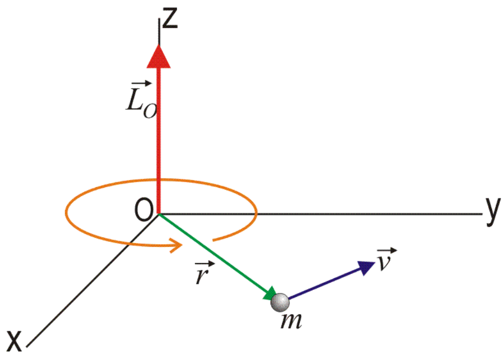
- **Colisión inelástica:** Se pierde parte de la energía cinética en el choque. Deben indicarnos datos como el porcentaje de energía absorbido y el parámetro de impacto.

El caso extremo ocurre cuando ambos cuerpos quedan unidos tras la colisión → **colisión totalmente inelástica.**

$\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{v}_f \rightarrow \mathrm{m}_1 \cdot \vec{v}_{1i} + \mathrm{m}_2 \cdot \vec{v}_{2i} = (\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2) \cdot \vec{v}_f$

5. Momento angular. Momento de una fuerza.

Momento angular de una partícula respecto a un punto. ($\vec{L}_O$):



Hasta ahora, para estudiar el movimiento de una partícula, hacíamos uso de las leyes de Newton. Estas leyes dan información sobre desplazamientos (permiten calcular aceleración, velocidad, trayectoria...) pero pierden utilidad cuando se trata de estudiar un cuerpo que gira, que da vueltas. Para estudiar las rotaciones usaremos una magnitud llamada momento angular (o momento cinético) respecto a un punto. Nos indica la tendencia que tiene un cuerpo a continuar con su estado de giro (o de *no giro*) respecto a un eje.

El momento angular de una partícula respecto a un punto O se define como $\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$

Módulo: $L_O = r \cdot m \cdot v \cdot sen\alpha$ Unidades: $[L_O] = kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

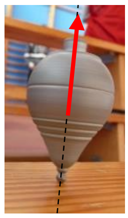
Dirección: Perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{p}$. Indica el eje respecto al que gira el vector de posición.

Sentido: Dado por la regla del sacacorchos al girar $\vec{r}$ sobre $\vec{p}$. Nos indica el sentido en el que gira el vector de posición respecto al punto O.

Punto de aplicación: El punto O.

Nota de ampliación: Cuando no se trata de una sola partícula, sino de un cuerpo real con forma y tamaño, como una peonza que gira, habría que sumar los momentos angulares de todas sus partículas. Esto se calcula con una integral, resultando que el momento angular es proporcional a la velocidad angular $\vec{\omega}$: $\vec{L}_O = I \cdot \vec{\omega}$

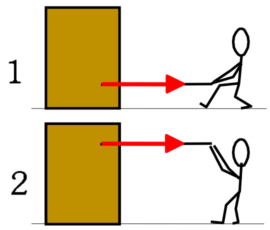
Donde I es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje de giro $I = \int_0^M r^2 dm$



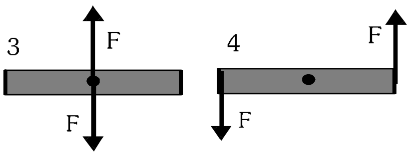
Momento de una fuerza respecto a un punto. ($\vec{M}_O$):

En el estudio que se ha hecho sobre las fuerzas en cursos anteriores, se consideraba a los cuerpos como partículas, es decir, como puntos. Todas las fuerzas que actuaban sobre la partícula se aplicaban en el mismo punto.

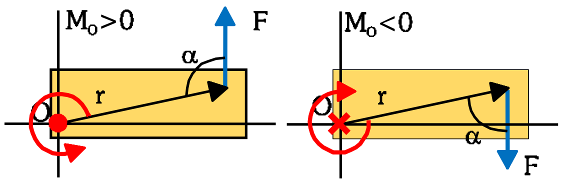
A partir de ahora vamos a tener en cuenta una situación más real. Los cuerpos tienen un tamaño y una forma determinada, y el punto en el que esté aplicada la fuerza tendrá mucha importancia. La misma fuerza puede producir diferentes efectos según sobre qué punto actúe. En el ejemplo de la figura, la persona tira de la caja aplicando la misma fuerza en los dos casos, pero en el primer caso la arrastrará, mientras que en el segundo caso es muy probable que la caja gire y vuelque.



Veamos otro caso. Sobre la tabla de las figuras 3 y 4 actúan dos fuerzas iguales y de sentido contrario. Según la primera ley de Newton, como $\Sigma\vec{F} = 0$, las tablas no deberían desplazarse. Y eso ocurre, pero en la segunda tabla (4) sí se observa un movimiento: la tabla gira, aunque su centro se mantenga en el mismo sitio.



De los ejemplos anteriores vemos que **las fuerzas pueden producir** no sólo desplazamientos, sino también **giros de los cuerpos**. Y la intensidad de este giro dependerá del valor de la fuerza y del punto donde ésta esté aplicada.

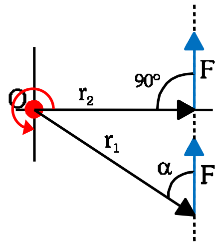


Para estudiar la tendencia a girar que tendrá un cuerpo que sufre fuerzas, se define una magnitud física nueva, llamada **momento de la fuerza respecto a un punto**. ($\vec{M}_O$). Es una magnitud vectorial, dada por la expresión: $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

Módulo: $M_O = r \cdot F \cdot sen\alpha$

Dirección: Perpendicular a r y F. Marca el eje respecto al que tiende a girar.

Sentido: Regla del sacacorchos.



Una propiedad muy útil del momento de una fuerza, es que su valor es el mismo si deslizamos la fuerza a lo largo de su recta soporte. Por ejemplo, en la figura, las dos fuerzas, de igual módulo y con la misma recta soporte, ejercen el mismo momento respecto a O.

Cuestión: ¿Por qué ejercen el mismo momento?

Esta propiedad puede usarse en los cálculos, trasladando la fuerza hasta el punto en el que nos sea más cómodo calcular su $\vec{M}_O$

Relación entre $\vec{L}_O$ y $\vec{M}_O$: Conservación del momento angular de una partícula:

Hemos visto que el momento angular $\vec{L}_O$ de una partícula se calcula con la expresión $\vec{L}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$, e indicaba cómo giraba (hacia dónde y con qué intensidad) el vector de posición de la partícula respecto a O.

Vamos a estudiar qué factores pueden influir en que ese giro cambie (ya sea para ir más rápido, más lento, o girar respecto a otro eje). Para ello debemos estudiar su derivada:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{M}_O \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \Sigma\vec{M}_O$$

Es decir: "*El momento angular de una partícula respecto a un punto varía debido a la acción de los momentos (respecto al mismo punto) de las fuerzas aplicadas sobre la partícula*"

Podemos extraer también el Principio de conservación del momento angular: "*El momento angular de una partícula (su movimiento de giro) se mantendrá constante si y sólo si el momento total resultante sobre la partícula es cero*"

Esto ocurre en las siguientes situaciones:

- Que no haya fuerzas aplicadas
- Que haya fuerzas pero que sus momentos se anulen.
- Que las fuerzas estén aplicadas sobre el punto O ($\vec{r} = 0$)
- Que $\vec{r}$ y $\vec{F}$ sean paralelos. Esto es lo que ocurre en el caso de las *fuerzas centrales* (como la fuerza gravitatoria que sufren los planetas alrededor del Sol).

6. Energía. Tipos.

Por energía entendemos la capacidad que posee un cuerpo para poder producir cambios en sí mismo o en otros cuerpos. Es una propiedad que asociamos a los cuerpos para poder explicar estos cambios.

Estamos acostumbrados a clasificar la energía por un criterio técnico: según la fuente de producción. Así hablamos de energía eólica, calorífica, nuclear, hidroeléctrica, solar, química...

Sin embargo, en Física es más útil establecer una clasificación en base a la razón por la que el cuerpo puede producir cambios. Tendremos entonces.

Energía cinética (Ec): Energía debida al movimiento del cuerpo. $\boxed{Ec = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}$

Energía potencial (Ep): Debida a la acción de ciertas fuerzas que actúen sobre el cuerpo. Se denominan *fuerzas conservativas*, y las estudiaremos en el apartado 1.4. Según la fuerza que actúe, tendremos:

- Energía potencial gravitatoria (Ep_g): debida a la acción de la fuerza gravitatoria.
- Energía potencial electrostática (Ep_e): debida a la acción de la fuerza electrostática entre cargas.

- Energía potencial elástica (Ep_{el}): debida a la acción de la fuerza elástica (p.e. un muelle al comprimirlo o estirarlo).
Energía mecánica (E_M): Suma de las energías cinéticas y potencial del cuerpo. $E_M = Ec + Ep$
Energía interna (U): Debida a la temperatura del cuerpo y a su estructura atómico-molecular.

Unidades de energía: Cualquier forma de energía se mide en las mismas unidades: en el S.I es el Julio (J). ($1\ J = 1\ kg\ m^2\ s^{-2}$)

Otras unidades:
- caloría (cal): 1 cal = 4,18 J
- ergio (erg): 1 erg = 10^{-7} J
- kilovatio-hora (kW·h): 1 kW·h = $3,6 \cdot 10^6$ J

Transferencias de energía: calor y trabajo:

Al estudiar un sistema desde el punto de vista de la energía, podemos ver que en cualquier cambio que ocurra en el mismo tenemos una transferencia de energía entre unos cuerpos y otros (a veces en el mismo cuerpo). Así, al poner en contacto un cuerpo frío con otro caliente, el cuerpo frío aumenta su energía interna, a costa de disminuir la energía interna del cuerpo caliente, hasta llegar al equilibrio. En un cuerpo que cae en caída libre, aumenta su energía cinética a costa de la disminución de su energía potencial gravitatoria.

Estas transferencias de energía se pueden realizar de dos formas:

· Por medio de un desplazamiento, bajo la acción de una fuerza: en ese caso se realiza **trabajo**.

· Debido a una diferencia de temperatura: se habla entonces de que se transfiere **calor**.

7. Trabajo, características. Teorema trabajo-energía cinética.

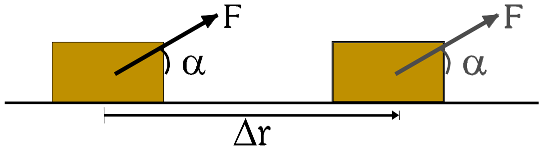
De lo comentado en el apartado anterior, vemos que el trabajo nos indica la energía transferida por la acción de una fuerza durante un desplazamiento del cuerpo.

Ejemplo: Una persona que suba un peso desde el suelo hasta un primer piso realiza un trabajo. Si sube hasta el segundo, realizará una trabajo doble, lo mismo que si sube el doble de peso hasta el primer piso. Sin embargo, si se limita a sostener el peso, sin desplazamiento, no realizará trabajo (perderá energía, eso sí, pero no realiza trabajo).

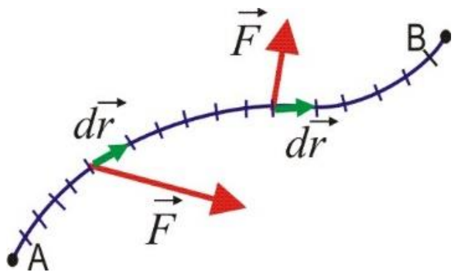
De este ejemplo vemos que en el trabajo influyen dos magnitudes: la fuerza aplicada y el desplazamiento realizado.

Si la fuerza que estamos aplicando es constante (en módulo, dirección y sentido), el trabajo que realiza dicha fuerza se calcula mediante la expresión:

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$$



Cuando la fuerza aplicada no es constante, sino que varía para los diferentes puntos del desplazamiento (caso de la fuerza gravitatoria, que varía con la altura, o la fuerza elástica de un muelle, que aumenta al estirar), podemos descomponer el camino recorrido en trozos infinitamente pequeños ($d\vec{r}$), en los que podemos considerar que la fuerza aplicada apenas cambia, se mantiene constante. Así, en cada trozo infinitamente pequeño tendremos que la fuerza ha realizado un trabajo (también infinitamente pequeño) dado por $\vec{F} \cdot d\vec{r}$. Para calcular el trabajo total, tendremos que sumar todos esos trabajos infinitamente pequeños a lo largo del recorrido. Esa operación matemática es una integral definida entre los puntos A y B. Así el trabajo nos quedará $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$



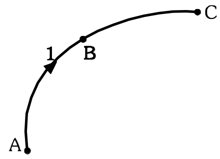
Este tipo de integrales se denominan integrales de línea, y se calculan a lo largo de una trayectoria.

Si desarrollamos el producto $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ con sus componentes

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}) \cdot (d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}) = \int_A^B (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz) =$$

$$= \int_{xA}^{xB} F_x \cdot dx + \int_{yA}^{yB} F_y \cdot dy + \int_{zA}^{zB} F_z \cdot dz$$

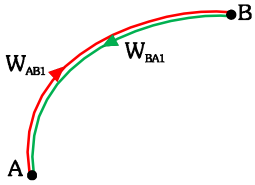
Propiedades del trabajo:



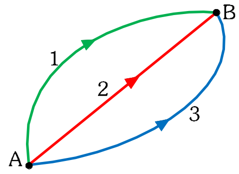
Unidades: $[W] = N \cdot m = J$

Signo del trabajo: W > 0 → α < 90º La fuerza favorece el desplazamiento
W < 0 → α > 90º La fuerza se opone al desplazamiento
W = 0 → α = 90º La fuerza es perpendicular al desplazamiento

Aditividad: $W_{AC} = W_{AB} + W_{BC}$ El trabajo entre dos puntos puede descomponerse.



Reversibilidad: Al invertir el sentido del recorrido (siempre que sigamos el mismo camino) el trabajo cambia de signo ($W_{AB1} = -W_{BA1}$)



Dependencia del camino: En general, el trabajo realizado por una fuerza entre dos puntos depende del camino seguido. Es decir, la fuerza realiza diferente trabajo según el recorrido. Esto ocurre con la mayoría de las fuerzas.

Sin embargo, existe un tipo de fuerzas para las que el trabajo que realizan no depende del camino seguido. Únicamente depende (dicho trabajo) de los puntos inicial y final del recorrido. Reciben el nombre de *fuerzas conservativas*, y las estudiaremos en el siguiente apartado.

Teorema trabajo-energía cinética: (También llamado *Teorema de las fuerzas vivas*)

Este teorema nos proporciona la relación existente entre trabajo y energía cinética, y justifica por qué la expresión de la energía cinética es la que es.

Supongamos un cuerpo con diversas fuerzas actuando sobre él. Debido a la acción de dichas fuerzas, el cuerpo se desplaza. El trabajo total realizado por el cuerpo será: $W_{TOT} = \Sigma W = \int_A^B \Sigma \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Ahora bien, según la segunda ley de Newton: $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$ sustituyendo esto en la expresión del trabajo:

$$W_{TOT} = \Sigma W = \int_A^B \Sigma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \cdot \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \cdot \left[\frac{|\vec{v}|^2}{2} \right]_A^B = \tfrac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \tfrac{1}{2} m \cdot v_A^2 = Ec_B - Ec_A$$

En resumen, llegamos a la conclusión de que $W_{TOT} = \Delta Ec = Ec_B - Ec_A$

$$\boxed{W_{tot} = \Delta Ec}$$

Esto se conoce como *Teorema Trabajo-Energía cinética*, y puede interpretarse de la forma siguiente: "*El trabajo total realizado sobre un cuerpo se invierte en variar su energía cinética, y es igual a dicha variación*".

Potencia (P):

Cuando calculamos el trabajo realizado por una fuerza aplicada a un cuerpo, tenemos en cuenta la fuerza y el desplazamiento, pero no el tiempo que se ha invertido en el desplazamiento. Así, una grúa, al levantar un peso de 1000 N una altura de 10 m, realiza un trabajo de 10000 J, independientemente de que tarde un minuto o tres horas en levantarlo. El gasto energético es el mismo, pero hay diferencias entre ambos casos. Esta diferencia se refleja con una magnitud denominada potencia. Indica la rapidez con la que se realiza la transferencia de energía

$$P = \frac{W}{\Delta t} \qquad \text{Unidades: } [P] = \frac{J}{s} = Vatio\,(W)$$

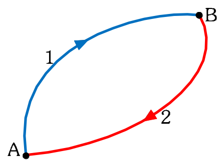
Una máquina que realice el mismo trabajo en menos tiempo tendrá una mayor potencia.

8. Fuerzas conservativas. Energía potencial.

Una fuerza es conservativa cuando, al calcular el trabajo que realiza en un desplazamiento entre dos puntos, el resultado no depende del camino que se haya seguido. Este trabajo depende sólo de los puntos inicial y final.

(Son fuerzas conservativas la fuerza gravitatoria, la elástica y la electrostática)

Consecuencias:



- Supongamos un camino cerrado, en el que volvemos al mismo punto de partida. Lo descomponemos en dos trozos, de forma que el trabajo total será $W_{TOT} = W_{AB1} + W_{BA2}$

Ahora bien, $W_{BA2} = -W_{AB2}$ por la propiedad de reversibilidad

y $W_{AB2} = W_{AB1}$ ya que es una fuerza conservativa

con lo que nos queda que $W_{TOT} = W_{AB1} - W_{AB1} = 0$

Si una fuerza es conservativa, el trabajo que realiza en cualquier recorrido cerrado es siempre cero. (Esto se expresa de esta forma: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$)

- Ya que el trabajo de las fuerzas conservativas sólo depende de los puntos inicial y final, podemos aprovechar esto para calcularlo de forma más fácil (es decir, ahorrarnos el hacer la integral cada vez que hagamos el cálculo). Para ello usamos el concepto de energía potencial.

La energía potencial es la *energía almacenada por un cuerpo cuando sobre éste actúa una fuerza conservativa*. Decimos que el cuerpo tiene almacenada una cierta energía potencial Ep_A en el punto A, y otra energía potencial Ep_B en el punto B. De esta forma, el trabajo realizado por la fuerza al desplazarse entre A y B, coincide con el cambio en dicha energía potencial. Así

$$W_{FC} = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B \qquad \boxed{W_{FC} = -\Delta Ep}$$

Significado del signo negativo: Supongamos que la fuerza F_C realiza un trabajo positivo, aportando Ec al cuerpo. ¿De dónde proviene esa energía? Pues de la energía potencial, que tiene que disminuir. De ahí que tengan signo opuesto el trabajo y la variación de energía potencial. Puede razonarse de la misma forma cuando el trabajo es negativo. Le resta energía al cuerpo, que se almacena como energía potencial.

Observamos que definimos la energía potencial de forma que siempre calculamos diferencias de energía entre dos valores. De hecho, sabemos la diferencia (cuánto ha cambiado), no el valor concreto en cada punto.

Para tener un valor en cada punto, debemos establecer un origen de potencial , un punto en el que digamos que la energía potencial vale cero. Según el punto que se escoja obtendremos una fórmula para la *Ep* u otra.

Cálculo de la Ep asociada a una fuerza conservativa: La expresión de la Ep se calcula a partir del trabajo realizado por la fuerza $W_{FC} = -\Delta Ep$ → $\int_A^B \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = Ep_A - Ep_B$ Habrá que calcular la integral en general, y la fórmula que resulte será la que usemos, una vez hayamos escogido el origen de potencial

Energía potencial gravitatoria (considerando $g \approx cte$, en la superficie terrestre)

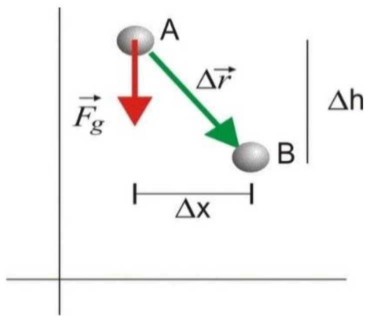
Partiendo de la expresión que define a la energía potencial:

$W_{Fg} = -\Delta Ep_g \quad \rightarrow \quad Ep_A - Ep_B = W_{Fg}$

Como estamos considerando la fuerza gravitatoria como constante $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g} = c\vec{t}e$, el trabajo realizado en un desplazamiento cualquiera entre dos puntos A y B puede calcularse con la expresión

$$W_{Fg} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (-mg\,\vec{j}) \cdot (\Delta x\vec{i} + \Delta h\,\vec{j}) = -mg\Delta h = m \cdot g \cdot h_A - m \cdot g \cdot h_B$$

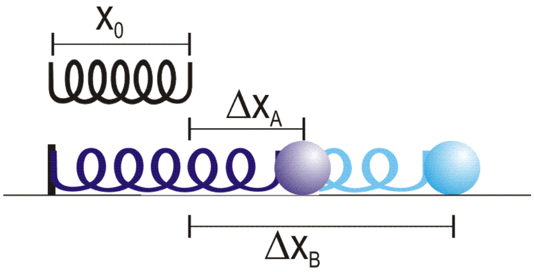
Así, tenemos que $Ep_{gA} - Ep_{gB} = W_{Fg} = m \cdot g \cdot h_A - m \cdot g \cdot h_B$



Eligiendo el origen para la energía potencial en el punto de altura 0. $Para\ h_B = 0 \rightarrow Ep_B = 0$

Y la fórmula nos quedará, para cualquier punto $\boxed{Ep_g = m \cdot g \cdot h \quad (origen\,en\; h = 0)}$

Energía potencial elástica:



Es la energía que almacena un resorte (un muelle) o algún cuerpo elástico al ser estirado o comprimido.
Partiendo de la expresión que define a la energía potencial,

$W_{Fel} = -\Delta Ep_{el} \quad \rightarrow \quad Ep_A - Ep_B = W_{Fel}$

En este caso, la fuerza elástica no es constante, sino que varía según el desplazamiento $\vec{F}_{el} = -K \cdot \Delta\vec{r} = -K \cdot \Delta x \cdot \vec{i}$

El desplazamiento desde la posición de equilibrio será: $\Delta x = x - x_0$

El trabajo realizado por la fuerza elástica entre dos puntos:

$$W_{el} = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -K \cdot \Delta x \cdot \vec{i} \cdot dx \cdot \vec{i} = -K \cdot \int_A^B \Delta x \cdot dx = -K \cdot \left[\frac{(\Delta x)^2}{2} \right]_{xA}^{xB} = \tfrac{1}{2} K \cdot (\Delta x_A)^2 - \tfrac{1}{2} K \cdot (\Delta x_B)^2$$

Así, $Ep_A - Ep_B = W_{Fel} = \tfrac{1}{2} K \cdot (\Delta x_A)^2 - \tfrac{1}{2} K \cdot (\Delta x_B)^2$ elegimos origen, para $x_B = x_0 \rightarrow \begin{matrix} \Delta x_B = 0 \\ Ep_B = 0 \end{matrix}$

Con lo que la expresión nos queda $\boxed{Ep_{el} = \tfrac{1}{2} K \cdot (\Delta x)^2 \quad \text{origen en } x = x_0,}$ la posición de equilibrio del muelle

9. Energía mecánica. Conservación.

Como ya habíamos comentado, la energía mecánica de un cuerpo se definía como la suma de las energías cinética y potenciales que posee dicho cuerpo.

$$\boxed{E_M = Ec + Ep = Ec + (Ep_g + Ep_e + Ep_{el})}$$

Conservación de la energía mecánica: Relación entre E_M y el trabajo de las fuerzas aplicadas.

Cuando se produce un cambio en la energía mecánica de un cuerpo, esto será debido a que cambia alguna de las energías que la componen (energía cinética, potencial). Así: $\Delta E_M = \Delta Ec + \Delta Ep$

Pero, según hemos visto en apartados anteriores. $\Delta Ec = W_{TOT}$ $\Delta Ep = -W_{FC}$

Con lo cual, nos queda $\Delta E_M = W_{TOT} - W_{FC} = W_{FNC}$ $\boxed{W_{FNC} = \Delta E_M}$

Es decir, *son las fuerzas no conservativas aplicadas al cuerpo las que hacen que cambie su energía mecánica*.

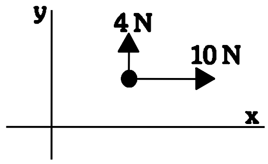
Dicho de otra forma: *Si sobre un cuerpo actúan fuerzas no conservativas y éstas realizan trabajo, la energía mecánica del cuerpo variará*. Esas fuerzas no conservativas pueden hacer que la E_M aumente o disminuya. En ese último caso (que la E_M disminuya) se dice que la fuerza es *disipativa* (por ejemplo el rozamiento)
Cualquier fuerza aplicada sobre el cuerpo será no conservativa (excepto la gravitatoria, la elástica y la eléctrica). Contribuirá a aumentar o disminuir la Energía mecánica del cuerpo, dependiendo del signo del trabajo realizado.

<u>**Principio de conservación de la energía mecánica**</u>:
De lo anterior podemos extraer una nueva lectura, que se conoce como "principio de conservación de la energía mecánica".
Si sobre un cuerpo no actúan fuerzas no conservativas, o éstas no realizan trabajo, la energía mecánica del cuerpo se mantendrá constante $\quad si \quad W_{FNC} = 0 \rightarrow \Delta E_M = 0 \rightarrow E_M = cte$.

<u>Consecuencia importante</u>: Si $\Delta E_M = 0 \rightarrow \Delta Ec + \Delta Ep = 0 \rightarrow \Delta Ec = -\Delta Ep$ Esto sólo se cumple si la energía mecánica se mantiene constante (esto es, si $W_{FNC} = 0$). Por ejemplo, una piedra que cae sin rozamiento.

Problemas Tema 1: Dinámica de la partícula:

Leyes de Newton. Cálculo de fuerzas:



1. La partícula de la figura, de 2 kg, se encuentra inicialmente en reposo en el punto (4,3) m, y sufre únicamente las fuerzas indicadas. Calcular la aceleración que sufre dicha partícula, así como la velocidad que tendrá al cabo de 5 s.

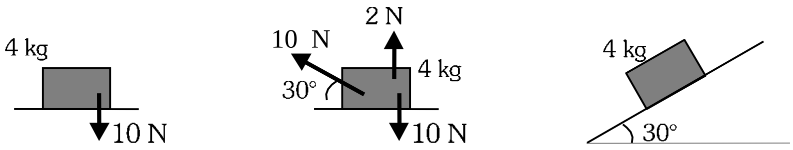
Sol: ($\vec{a} = 5\,\vec{i} + 2\,\vec{j}\ m/s^2$; $\vec{v} = 25\,\vec{i} + 10\,\vec{j}\ m/s$)

2. Un electrón se mueve en el sentido positivo del eje y con una velocidad de $4 \cdot 10^5$ ms^{-1}. Un campo eléctrico hace que el electrón sufra una fuerza de $1{,}6 \cdot 10^{-16}$ N en el sentido negativo del eje x. Sabiendo que la masa de un electrón es de $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, calcular la aceleración que sufre el electrón y su ecuación de movimiento. Dibujar aproximadamente la trayectoria que sigue el electrón.

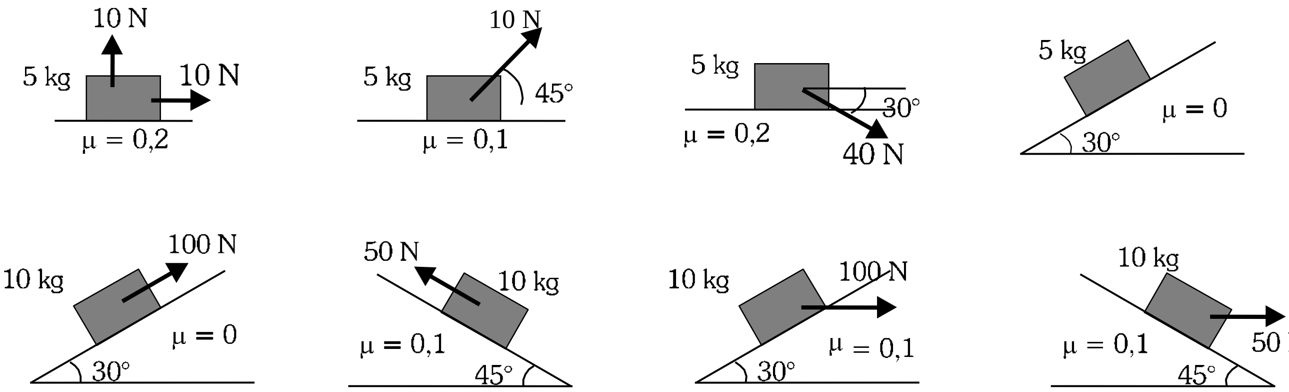
Sol: ($\vec{a} = -1{,}75 \cdot 10^{14}\ \vec{i}\ ms^{-2}$; $\vec{r} = 4 \cdot 10^5\, t\ \vec{j} - 8{,}79 \cdot 10^{13}\, t^2\ \vec{i}\ \ m$)

3. Calcular la reacción normal del plano en las siguientes situaciones. (g = 9,8 N/kg)

Sol: (49,2 N , 42,2 N , 33,95 N)



4. Dibuje y calcule todas las fuerzas que actúan sobre el bloque en cada caso, y su aceleración. (g = 9,8 N/kg)

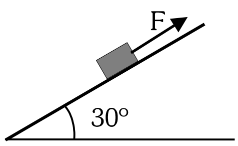


(*1. a = 0,44 m/s² ; 2. a = 0,58 m/s² ; 3. a = 4,17 m/s² ; 4. a = 4,9 m/s² ;*
5. a = 5,1 m/s² ; 6. a = 1,24 m/s² ; 7. a = 2,41 m/s² ; 8. a = 10,12 m/s²)

5. Un bloque desciende por un plano inclinado 30º con velocidad constante. Calcule razonadamente el coeficiente de rozamiento del bloque con el plano. (g = 9,8 N/kg) *Sol:* ($\mu = tg30º = 0{,}577$)

6. Un bloque de 2 kg desliza por una superficie horizontal con coeficiente de rozamiento 0,3, debido a que tiramos de él mediante una cuerda con una fuerza de 8 N que forma 20º con la horizontal. Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque y calcule sus módulos. (g = 9,8 N/kg)

Sol: ($F = 8\ N$, $Fg = 19{,}6\ N$, $N = 16{,}86\ N$, $F_R = 5{,}06\ N$)

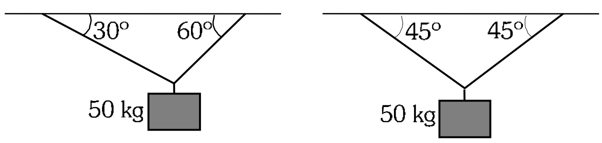


7.- Calcular F para que el cuerpo de la figura, de 4 kg, ascienda con velocidad constante, teniendo en cuenta que μ = 0,4. (g = 9,8 N/kg) *Sol: (F= 33,18 N)*

8. Una farola de 5 kg cuelga de un cable. Sopla un fuerte viento en dirección horizontal que aplica una fuerza constante de 20 N sobre la farola. Calcule razonadamente el ángulo que forma el cable con la vertical en la situación de equilibrio. (g = 9,8 N/kg) *Sol:(22,2º)*

9. En las figuras aparecen cuerpos sujetos al techo mediante cables. Calcular, para cada caso, el valor de la tensión en cada cable. (g = 9,8 N/kg)

Sol: (A: $T_1 = 245{,}01\ N$, $T_2 = 2424{,}36\ N$; B: $T_1 = T_2 = 346{,}48\ N$)



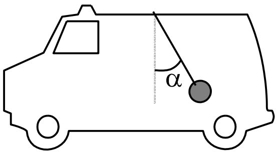
10. Empujamos horizontalmente un bloque de 50 kg sobre una superficie rugosa. Se observa que, para empujes pequeños, el bloque no se mueve. Si queremos mover el bloque, debemos realizar una fuerza superior a 245 N. Calcular a partir de estos datos el coeficiente estático de rozamiento entre el bloque y el plano. *Sol:* ($\mu_s = 0{,}5$)

11. Colocamos un bloque de 20 kg sobre una tabla rugosa. Vamos inclinando poco a poco la tabla. Al principio no se produce el deslizamiento. Al seguir inclinando y llegar a un ángulo de 30°, conseguiremos que el bloque deslice. Calcular el coeficiente estático de rozamiento entre el bloque y el plano. *Sol:* ($\mu = 0{,}57$)

12.- Una persona se encuentra sobre una báscula en el interior de un ascensor. Con el ascensor quieto la báscula marca 686 N. (g = 9,8 N/kg). Calcular cuánto marcará si:

a) El ascensor sube con una velocidad constante de 5 m/s. *Sol: (686 N)*
b) El ascensor sube con una aceleración constante de 2 m/s^2 *Sol: (826 N)*
c) El ascensor baja con una aceleración constante de 2 m/s^2 *Sol: (556 N)*
d) La cuerda del ascensor se parte y éste cae en caída libre. *Sol: (0 N)*

13.- Una furgoneta transporta en su interior un péndulo que cuelga del techo. Calcular el ángulo que forma el péndulo con la vertical en función de la aceleración de la furgoneta.
Sol: ($\alpha = arctg\,(a/g)$)



14. Una escopeta de 5 kg dispara una bala de 15 g con una velocidad de 500 m/s. Calcular la velocidad de retroceso de la escopeta. *Sol:* ($\vec{v}_e = -1{,}5\ \vec{i}\ m/s$)

15. Una persona de 60 kg corre a 10 m/s, tras una vagoneta de 200 kg que se desplaza a 7 m/s. Cuando alcanza a la vagoneta, salta encima, continuando los dos juntos el movimiento. Calcular con qué velocidad se mueven tras subirse encima. *Sol:* ($\vec{v} = 7{,}7\ \vec{i}\ m/s$)

Momento angular. Momento de fuerzas

16. Una partícula de 10 kg que se mueve a 5 ms^{-1} en la dirección positiva del eje Y se encuentra en un cierto instante en el punto (3,0). Calcule el momento angular de la partícula respecto al origen:

a) Usando la expresión vectorial ($\vec{L}_O = 150\ \vec{k}\ \ kg\ m^2\ s^{-1}$)
b) Calculando el módulo y luego la dirección y sentido por la regla de la mano derecha.

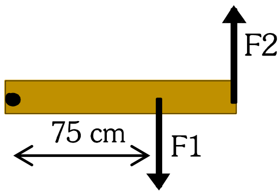
17. Una partícula de masa 2 kg, y cuya posición respecto al origen en un determinado instante viene dada por $\vec{r} = 3\vec{i} + \vec{j}$ (m), se mueve en ese mismo instante con una velocidad $\vec{v} = 2\ \vec{i}\ \ ms^{-1}$. Calcular:

a) Cantidad de movimiento de la partícula. *Sol:*($4\ \vec{i}\ kg\ m\ s^{-1}$)
b) Momento angular respecto al origen. *Sol:*($-4\ \vec{k}\ \ kg\ m^2\ s^{-1}$)
c) Repetir el problema si $\vec{v} = \vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\vec{k}$ ms^{-1}.

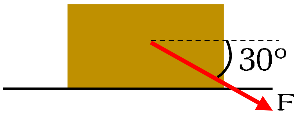
Sol: ($\vec{p} = 2\ \vec{i} - 4\ \vec{j} + 6\vec{k}\ \ kgms^{-1}$; $\vec{L}_O = 6\ \vec{i} - 18\ \vec{j} - 14\ \vec{k}\ \ kgm^2s^{-1}$)

18. Un LP de vinilo (de 30 cm de diámetro) gira en sentido horario a 33 rpm. Una mosca se posa en el extremo del disco, y da vueltas al mismo ritmo. Calcular el momento angular de la mosca respecto al centro del disco, suponiendo que su masa es de 0,05 g. *Sol:*($\vec{L}_O = -3{,}89 \cdot 10^{-6}\ \vec{k}\ \ kg\ m^2\ s^{-1}$)

19. La figura representa una tabla de 1 m de longitud clavada al suelo por un extremo mediante un clavo que permite que la tabla gire. Si, estando la barra en reposo, aplicamos las fuerzas indicadas: F_1 de 160 N, y F_2 de 130 N (ambas en el plano horizontal) ¿Girará la tabla? Si lo hace ¿En qué sentido? *Sol:(sentido antihorario)*

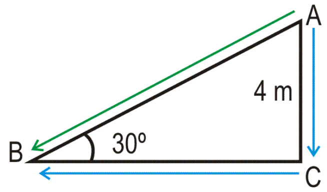


Trabajo y energía. (Nota: considere en todos los problemas, g = 9,8 N/kg)



20. Una fuerza de 130 N actúa sobre un bloque de 9 kg como se indica en el dibujo. Si μ = 0,3 calcula el trabajo que realiza cada fuerza de las que actúan sobre el cuerpo cuando el bloque se mueve 3 m a la derecha.
Sol:($W_N = W_P = 0$ J, $W_{Fr} = -137{,}9$ J, $W_F = 337{,}7$ J)

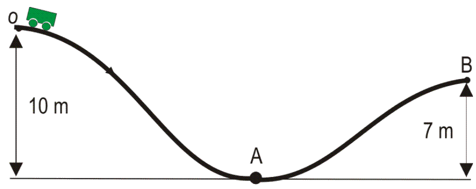
21. Se lanza un bloque de 5 kg, que desliza hacia arriba por una rampa inclinada 30º. El bloque sube hasta una altura de 1 m por la rampa. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento es de 0,2, calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque durante la subida. ($W_N = 0$ J, $W_{Fr} = -16{,}97$ J, $W_{Fg} = -49$ J)



22. Bajamos una caja de 10 kg desde un piso (A) hasta el punto B en el suelo de dos formas diferentes: 1) Descolgándola con una cuerda hasta el suelo (C) y luego arrastrándola horizontalmente. 2) Deslizando la caja por una rampa inclinada 30º. Calcular el trabajo realizado por la fuerza peso por cada uno de los caminos seguidos. ¿Es lógico el resultado obtenido? Razonar. (*392 J por ambos caminos*)

23. Un bloque de 5 kg desliza con velocidad constante por una superficie horizontal mientras se le aplica una fuerza de 10 N, paralela a la superficie.
a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque y calcule el trabajo realizado por las distintas fuerzas en un desplazamiento del bloque de 0,5 m.
b) Dibujar en otro esquema las fuerzas que actuarían sobre el bloque si la fuerza que se le aplica fuera de 30 N en una dirección que forma 60º con la horizontal, e indicar el valor de cada fuerza. Calcular la variación de energía cinética del bloque en un desplazamiento de 0,5 m. *Sol:*($\Delta Ec = 5{,}2$ J)

24. Un trineo de 100 kg parte del reposo y desliza hacia abajo por la ladera de una colina de 30º de inclinación respecto a la horizontal.
a) Suponiendo que no existe rozamiento, determine, para un desplazamiento de 20 m, la variación de sus energías cinética, potencial y mecánica, así como el trabajo realizado por el campo gravitatorio terrestre.
Sol:($\Delta Ec = 9800$ J , $\Delta Ep_g = -9800$ J , $\Delta E_M = 0$ J , $W_{Fg} = 9800$ J)
b) Explique, sin necesidad de cálculos, cuáles de los resultados del apartado a) se modificarán y cuáles no, si existiera rozamiento.



25. ¿Qué velocidad tendrá un vagón de una montaña rusa sin rozamiento en los puntos A y B de la figura, si el carrito parte de O con $v_0 = 0$ m/s?
Sol:($v_A = 14$ m/s ; $v_B = 7{,}67$ m/s)

26. Un cuerpo se lanza hacia arriba por un plano sin rozamiento inclinado 30º, con velocidad inicial de 10 m s^{-1}.
a) Explique cómo varían las energías cinética, potencial y mecánica del cuerpo durante la subida.
b) ¿Cómo variaría la longitud recorrida si se duplica la velocidad inicial? (*duplicando v, se cuadruplica d*)

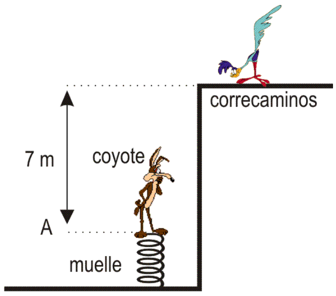
27. Se lanza un cuerpo por un plano horizontal con una velocidad de 6 m s^{-1}. Si μ = 0,3 ¿Qué distancia recorrerá el cuerpo hasta que se pare? *Sol:*(*6,1 m*)

28. Un bloque de 5 kg se desliza por una superficie horizontal lisa con una velocidad de 4 m/s y choca con un resorte de masa despreciable y K = 800 N/m, en equilibrio y con el otro extremo fijo. Calcule razonadamente cuánto se comprime el resorte. *Sol:*($\Delta x = 0{,}31$ m)

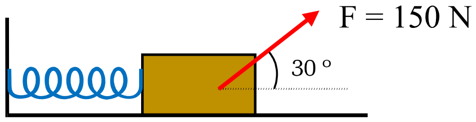
29. Un muelle de constante elástica 250 N m^{-1}, horizontal y con un extremo fijo, está comprimido 10 cm. Un cuerpo de 0,5 kg, situado en contacto con su extremo libre, sale despedido al liberarse el muelle. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento del cuerpo con el suelo es de 0,2, calcule razonadamente la distancia que recorre el cuerpo hasta que se para. *Sol:* ($\Delta r = 1{,}28$ m)

30. Un bloque de 5 kg desliza sobre una superficie horizontal con μ = 0,2. Cuando su velocidad es de 5 m s^{-1} choca contra un resorte de masa despreciable y de constante elástica K = 2500 N m^{-1}. Calcule razonadamente la longitud que se comprime el resorte. *Sol:*($\Delta x = 0{,}22$ m)

31. En vista de su mala suerte, el coyote ha decidido atrapar al correcaminos alcanzándolo por sorpresa cuando pare a comer usando para ello un muelle marca ACME según el siguiente esquema:
Calcular hasta qué altura medida desde el punto A subirá el coyote si K= 7000 N/m, la masa del coyote es 50 kg, la fuerza de rozamiento entre el coyote y el aire puede suponerse constante y de 20 N y la compresión inicial del muelle es 1m. ¿Atrapará el coyote al correcaminos?
Sol:(6,86 m. Evidentemente, no lo atrapa.)

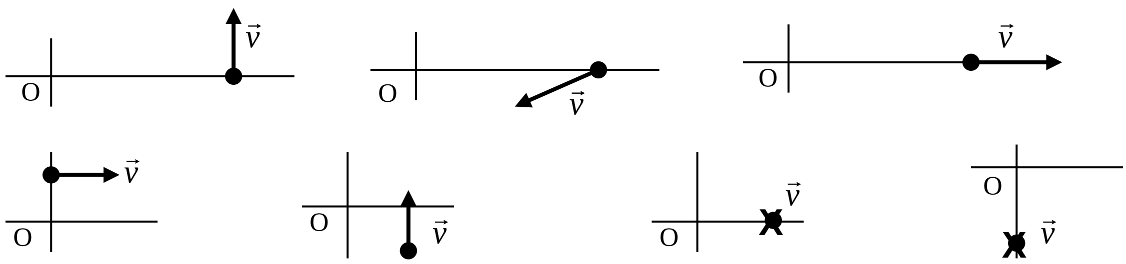


32. Un bloque de 20 kg se encuentra sobre una superficie horizontal soldado a uno de los extremos de un resorte de K = 100 N/m, en equilibrio y con el otro extremo fijo. Se tira del bloque con una fuerza de 150 N en una dirección que forma un ángulo de 30º con la horizontal hasta desplazar el bloque una longitud de 0,5 m. Si el coeficiente de rozamiento es 0,4 , calcule el trabajo de la fuerza de rozamiento, y la velocidad final del bloque. *Sol:*($W_{FR} = -25$ J ; $v = 1,65$ m/s)



Cuestiones teóricas:

1. Dibuje la dirección y sentido del momento angular respecto al origen en las situaciones siguientes.



2. a) ¿Puede un mismo cuerpo tener más de una forma de energía potencial? Razone la respuesta aportando ejemplos.
b) Si sobre un cuerpo actúan tres fuerzas conservativas de distinta naturaleza y una no conservativa, ¿cuántos términos de energía potencial hay en la ecuación de la energía mecánica de esa partícula? Cómo aparece en dicha ecuación la contribución de la fuerza no conservativa?
c) ¿Es la fuerza de rozamiento una fuerza conservativa? ¿Por qué?

3. Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas:
a) El trabajo realizado por una fuerza conservativa cambia la energía cinética.
b) El trabajo realizado por una fuerza conservativa cambia la energía potencial.
c) El trabajo realizado por una fuerza conservativa cambia la energía mecánica.

4. a) ¿Depende la Ec del sistema de referencia escogido? ¿Y la Ep? Razonar.
b) ¿Puede ser negativa la Ec de una partícula? ¿Y la Ep? En caso afirmativo, explique el significado físico.

5. Comente las siguientes frases: a) La energía mecánica de una partícula permanece constante si todas las fuerzas que actúan sobre ella son conservativas; b) Si la energía mecánica de una partícula no permanece constante, es porque una fuerza disipativa realiza trabajo.

6. Comentar las siguientes afirmaciones, razonando si son verdaderas o falsas:
a) Existe una función energía potencial asociada a cualquier fuerza.
b) El trabajo de una fuerza conservativa sobre una partícula que se desplaza entre dos puntos es menor si el desplazamiento se realiza a lo largo de la recta que los une.

7. Una partícula se mueve bajo a acción de una sola fuerza conservativa. El módulo de su velocidad decrece inicialmente, pasa por cero momentáneamente y más tarde crece.
a) Poner un ejemplo real en que se muestre este comportamiento.
b) Describir la variación de energía potencial y la de la energía mecánica de la partícula durante el movimiento.

8. Una fuerza conservativa actúa sobre una partícula y la desplaza, desde un punto x_1 hasta otro punto x_2, realizando un trabajo de 50 J.

a) Determinar la variación de energía potencial de la partícula en ese desplazamiento. Si la energía potencial de la partícula es cero en x_1, ¿cuánto valdrá en x_2?
b) Si la partícula, de 5 g, se mueve bajo la influencia exclusiva de esa fuerza, partiendo del reposo en x_1, ¿cuál será la velocidad en x_2?, ¿cuál será la variación de energía mecánica?

10. Sobre un cuerpo actúan sólo dos fuerzas. La primera realiza un trabajo de -10 J, y la segunda un trabajo de 15 J. Medimos que la energía mecánica del sistema aumenta en 15 J. ¿Es conservativa alguna de las fuerzas aplicadas? ¿Qué ocurrirá con la energía cinética del cuerpo? Razonar.

11. Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas, una conservativa, y otra no conservativa. La primera realiza un trabajo de 30 J, y la segunda un trabajo de –20 J. Razone qué conclusiones podemos extraer sobre los distintos tipos de energía que posee el cuerpo.

Cuestiones aparecidas en la PEvAU

PEvAU 2024. Junio. A1
a) Razone si son verdaderos los siguientes enunciados: i) El trabajo total realizado por las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica. ii) Siempre que actúen fuerzas no conservativas la energía mecánica varía.
b) Un bloque de masa 150 kg desliza por una superficie horizontal con rozamiento. El bloque se mueve hacia la derecha con velocidad inicial 3 m s-1. Sobre el bloque actúa una fuerza de módulo 20 N dirigida hacia la izquierda y que forma un ángulo de 30º sobre la horizontal, recorriendo 25 m hasta detenerse. i) Realice un esquema de las fuerzas ejercidas sobre el bloque. ii) Calcule las variaciones de energía cinética, potencial y mecánica del bloque en el trayecto descrito. iii) Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas aplicadas sobre el bloque.
$g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$

PEvAU 2023. Junio. A1
b) Un cuerpo de 5 kg desciende con velocidad constante desde una altura de 15 m por un plano inclinado con rozamiento que forma 30º con respecto a la horizontal. Sobre el cuerpo actúa una fuerza de 20 N paralela al plano y dirigida en sentido ascendente. i) Realice un esquema con las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. ii) Determine razonadamente el trabajo realizado por cada una de las fuerzas hasta que el cuerpo llega al final del plano.
$g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$

PEvAU 2022. Junio. A1
a) i) Defina los conceptos de energía cinética, energía potencial y energía mecánica e indique la relación que existe entre ellas cuando sólo actúan fuerzas conservativas. ii) Explique razonadamente cómo se modifica la relación si intervienen además fuerzas no conservativas.
b) Sobre un cuerpo de 3 kg, que está inicialmente en reposo sobre un plano horizontal, actúa una fuerza de 12 N paralela al plano. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es de 0,2. Determine, mediante consideraciones energéticas: i) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento tras recorrer el cuerpo una distancia de 10 m. ii) La velocidad del cuerpo después de recorrer los 10 m. $g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$

PEVAU 2021. Junio. A.1
a) Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba desde una altura h con una energía cinética igual a la potencial en dicho punto, tomando como origen de energía potencial el suelo. Explique razonadamente, utilizando consideraciones energéticas: i) La relación entre la altura inicial y la altura máxima que alcanza el cuerpo. ii) La relación entre la velocidad inicial y la velocidad con la que llega al suelo.
b) Un cuerpo de masa 2 kg desliza por una superficie horizontal de coeficiente de rozamiento 0,2 con una velocidad inicial de 6 ms^{-1}. Cuando ha recorrido 5 m sobre el plano horizontal, comienza a subir por un plano inclinado sin rozamiento que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Utilizando consideraciones energéticas, determine: i) La velocidad con la que comienza a subir el cuerpo por el plano inclinado. ii) La distancia que recorre por el plano inclinado hasta alcanzar la altura máxima. $g = 9{,}8\ ms^{-2}$

PEVAU 2021. Julio. A.2
a) Discuta razonadamente la veracidad de las siguientes frases: i) El trabajo realizado por una fuerza conservativa para desplazar un cuerpo es nulo si la trayectoria es cerrada. ii) En el descenso de un objeto por un plano inclinado con rozamiento, la diminución de su energía potencial se corresponde con el aumento de su energía cinética.

b) Un objeto de 2 kg, inicialmente en reposo, asciende por un plano inclinado de 30º respecto a la horizontal debido a la acción de una fuerza de 30 N paralela a dicho plano. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,1. i) Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre el objeto y calcule sus módulos. ii) Mediante consideraciones energéticas, determine la variación de energía cinética, potencial y mecánica cuando el objeto ha ascendido una altura de 1,5 m. $g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$

PEVAU 2020. Julio (Convocatoria ordinaria). Cuestión 5.
a) ¿Se cumple siempre que el aumento de Ec de una partícula es igual a la disminución de su Ep? Razonar.
b) Un cuerpo de 0,5 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado, que forma 30º con la horizontal, con una velocidad inicial de $5\ m\ s^{-1}$. El coeficiente de rozamiento es 0,2. i) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, cuando sube y cuando baja por el plano. Determine, mediante consideraciones energéticas: ii) La altura máxima que alcanza el cuerpo. iii) La velocidad con la que vuelve al punto de partida. $g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$

PEVAU 2019. Junio. Opción B. 1
a) Una partícula que se encuentra en reposo empieza a moverse por la acción de una fuerza conservativa. i) ¿Cómo se modifica su energía mecánica? ii) ¿Y su energía potencial? Justifique las respuestas.
b) Se quiere hacer subir un objeto de 100 kg una altura de 20 m. Para ello se usa una rampa que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Determine: i) El trabajo necesario para subir el objeto si no hay rozamiento. ii) El trabajo necesario para subir el objeto si el coeficiente de rozamiento es 0,2. $g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$

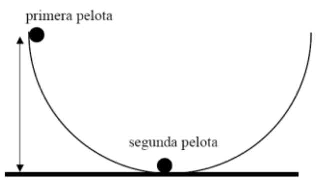
PEVAU 2019. Septiembre. Opción A. 1 b
a) Conteste razonadamente. i) ¿Puede asociarse una energía potencial a una fuerza de rozamiento? ii) ¿Qué tiene más sentido físico, la energía potencial en un punto o la variación de energía potencial entre dos puntos?
b) Se quiere subir un objeto de 1000 kg una altura de 40 m usando para ello una rampa que presenta un coeficiente de rozamiento con el objeto de 0,3. Calcule: i) El trabajo necesario para ello si la rampa forma un ángulo de 10º con la horizontal. ii) El trabajo si la rampa forma 20º. Justifique la diferencia encontrada en ambos casos. $g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$

Cuestiones aparecidas en la Fase Local de las Olimpiadas de Física. Granada

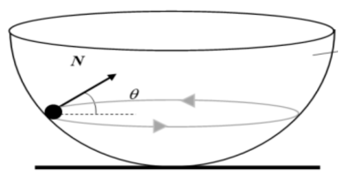
Olimpiada ESPAÑOLA DE FÍSICA

2024:
CUESTIÓN 1:
Una caja de embalaje de masa m es arrastrada sobre una superficie horizontal con velocidad constante, mediante una cuerda atada al frontal de la caja. La cuerda forma un ángulo θ con el suelo. El coeficiente de rozamiento es μ. ¿Para qué valor de θ la tensión en la cuerda es mínima?

2023.
CUESTIÓN 2.
Dos pelotas iguales, de masa m, se colocan dentro de un cuenco como indica la figura. Se suelta la primera pelota sin velocidad inicial, que acaba golpeando a la segunda pelota. Tras chocar, las dos pelotas permanecen en contacto, pegadas entre sí. Calcule, en función de m, la altura máxima alcanzada por las dos pelotas.



PROBLEMA 1
Una pelota pequeña de masa m se mueve con módulo y velocidad constante en una circunferencia horizontal, en la superficie interior de un cuenco semiesférico sin rozamiento. La fuerza de reacción normal $\vec{N}$ forma un ángulo θ con la horizontal.
a) Dibuje sobre la figura la dirección y sentido de la fuerza resultante sobre la pelota.
b) Demuestre que el módulo de dicha fuerza resultante es $F = \frac{mg}{tg\theta}$
c) Si el radio del cuenco es R = 0,8 m y θ = 22º, determine el módulo de la velocidad de la pelota.
d) Explique si esta pelota puede desplazarse con módulo de velocidad constante en una trayectoria circular con radio igual al radio R del cuenco.



ANEXO A: NOCIONES DE ESTÁTICA:

Estática de un sistema:

La estática es una rama de la Física que estudia el equilibrio de los cuerpos en reposo. Este estudio es muy importante en cualquier ingeniería y fundamental en arquitectura.

Para que un cuerpo esté en equilibrio estático debe cumplir dos condiciones: que no se desplace bajo la acción de las fuerzas, y que tampoco gire debido a las mismas. Es decir:

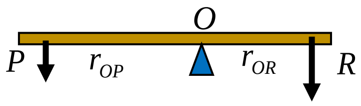
$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad ; \quad \Sigma \vec{M}_O = 0$$

En general, cada condición da lugar a tres ecuaciones, una para cada componente (x,y,z), con lo que tendríamos que resolver un sistema de seis ecuaciones. En este curso nos limitaremos a resolver problemas sencillos, en el plano, con lo que las ecuaciones nos quedarán.

$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases} \qquad \Sigma \vec{M}_O = 0 \rightarrow \Sigma M_{Oz} = 0$$ Un sistema de tres ecuaciones.

Aplicación: ley de la palanca.

El equilibrio de los momentos de las fuerzas aplicadas a un cuerpo tiene una aplicación práctica en la palanca (una barra rígida que puede girar respecto a un punto de apoyo O y que sufre dos fuerzas, denominadas potencia (P) y resistencia (R)).



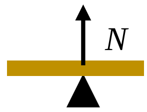
Aplicando $\Sigma \vec{M}_O = 0$, llegamos a la conocida ley de la palanca $P \cdot r_{OP} = R \cdot r_{OR}$

Reacciones en los apoyos:

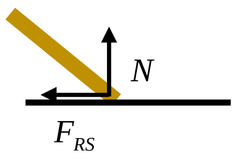
En los problemas de estática que hagamos en este curso, trabajaremos con objetos que podemos considerarlos aproximadamente como barras rígidas (una viga, un puente, una antena, una farola, una escalera, la articulación del brazo…) sobre las que actúan fuerzas aplicadas en diferentes puntos.

- La fuerza gravitatoria (peso) está aplicada sobre un punto llamado *centro de gravedad* (c.d.g). Si el cuerpo es un sólido regular y homogéneo (será así en todos los casos que veamos) el c.d.g. coincide con el centro del objeto.
- El cuerpo se mantiene en reposo debido a que está apoyado en otros objetos (el suelo, una pared, una cuerda, una bisagra…). Las fuerzas que aplican sobre el sólido, y que impiden su movimiento, se denominan en general *reacciones*. Veremos en este curso sólo algunos tipos de apoyo, los más sencillos, con sus reacciones.

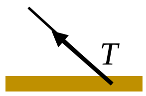
Apoyo sin rozamiento (apoyo simple)



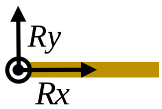
Apoyo con rozamiento



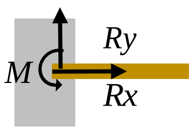
Cuerda (cable, cadena)

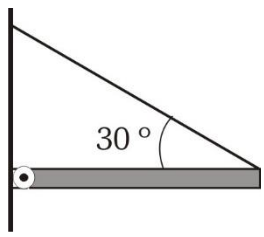


Bisagra



Empotramiento



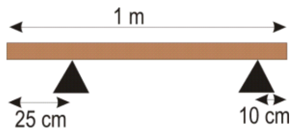


A.1. Una viga de 20 kg y 3 m de longitud está unida a la pared mediante una bisagra, y sostenida por el otro extremo por una cuerda tensa, como indica la figura. Calcule las reacciones en los apoyos. (g = 9,8 N/kg)

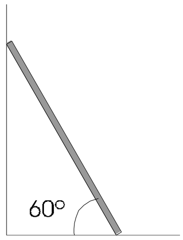
(T = 196 N, Rx = 169,74 N, Ry = 98 N)

A.2. Una viga de 50 kg está apoyada horizontalmente sobre dos apoyos simples, como indica la figura. Calcular la fuerza que ejerce cada soporte. (g = 9,8 N/kg)

(R_1 = 301,55 N , R_2 = 188,45 N)



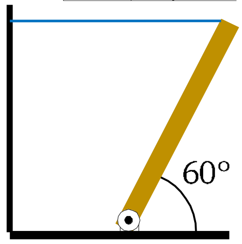
A.3. Una escalera de 10 kg y 2m de largo está apoyada sobre una pared formando un ángulo de 60º con el suelo. Entre la escalera y la pared no existe rozamiento, y entre la escalera y el suelo el coeficiente estático de rozamiento es de 0,4. (g = 9,8 N/kg)



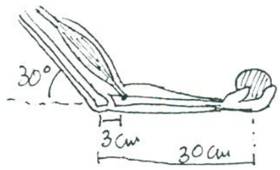
a) Calcular las reacciones del suelo y la pared.
(N_{PARED} = 28,29 N , N_{SUELO} = 98 N , F_{Rs} = 28,29 N)

b) ¿Qué ocurriría si el coeficiente de rozamiento se redujese a la mitad?

A.4. Un puente levadizo de madera mide 5 m y tiene una masa de 400 kg, y está dispuesto como indica la figura. Calcule la tensión del cable y las reacciones que ejerce la bisagra. (g = 9,8 N/kg)
(Sol: T= 1131,6 N, Rx = 1131,6 N, Ry = 3920 N (resultados en módulo))



A.5. Las articulaciones del cuerpo humano pueden estudiarse como palancas, como puede ser el codo que aparece en la figura. Calcular la fuerza que debe ejercer el bíceps (músculo) sobre el hueso para sostener un peso de 5 kg en la mano, y las reacciones en el codo. Considerar el antebrazo como un cuerpo homogéneo de 2 kg de masa.
(g = 9,8 N/kg)
(Pista: Considera el codo como una bisagra y el músculo como una cuerda que ejerce tensión.) (Sol: T=1200 N, Rx =1018,4 N, Ry =519,4 N (resultados en módulo))



ANEXO B: CÁLCULO DEL TRABAJO PRODUCIDO POR UNA FUERZA VARIABLE

Ya hemos visto, cuando estudiamos el concepto de trabajo, que cuando la fuerza que actúa sobre el cuerpo no es constante durante el desplazamiento, sino que depende de las coordenadas del punto de la trayectoria donde se encuentre, el trabajo se calcula mediante una integral. Es el caso, por ejemplo, de la fuerza que ejerce el viento sobre la vela de un barco, o cuando arrastramos algo pesado, la fuerza que ejercemos va disminuyendo al avanzar porque nos cansamos. Así:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})\cdot(d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}) = \int_A^B (F_x\cdot dx + F_y\cdot dy + F_z\cdot dz) =$$

$$= \int_{xA}^{xB} F_x\cdot dx + \int_{yA}^{yB} F_y\cdot dy + \int_{zA}^{zB} F_z\cdot dz$$

Tendremos que calcular tres integrales (dos, si el movimiento y la fuerza están en el plano). Los ejercicios que aparecen a continuación inciden sobre este cálculo.

B.1. Calcular el trabajo que realizan las siguientes fuerzas en un desplazamiento horizontal desde 1 m a la derecha del origen, hasta 2 m a la derecha.

a) $\vec{F}_1 = (x^2 + 3x + 1)\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$ N *Sol:(7,84 J)*

b) $\vec{F}_2 = (2 - 3x^2)\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$ N *Sol:(- 5 J)*

c) $\vec{F}_3 = (4x^3 + 2x^2 - x)\,\vec{i} + 7x^2\,\vec{j}$ N *Sol:(18,16 J)*

B.2. Sobre una partícula actúa una fuerza $\vec{F} = 2xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$ (N). Calcular el trabajo realizado al desplazar la partícula desde el punto (0,0) al (2,4) (m.):

a) A lo largo del eje 0X desde (0,0) al (2,0) y después paralelamente al eje 0Y desde (2,0) hasta (2,4).
b) A lo largo del eje 0Y desde (0,0) hasta (0,4) y después paralelamente al eje 0X desde (0,4) hasta (2,4)
c) A lo largo de la recta que une los dos puntos. *(Sol: 16 J a lo largo de los tres caminos)*

B.3. Una partícula está sometida a una fuerza $\vec{F} = xy\,\vec{i}$ (N), en la que x e y son coordenadas del punto del plano en el que está el cuerpo en cada instante, en metros. Calcular el trabajo realizado por tal fuerza al desplazar la partícula desde (0,3) hasta (3,0) (m):

a) A lo largo de la recta que une los puntos *Sol:(4,5 J)*
b) A lo largo del camino (0,3) → (3,3) → (3,0). *Sol:(13,5 J)*
c) ¿Podría ser conservativa esa fuerza? Razone.