Tema 0: Vectores. Cinemática.

Magnitudes escalares y vectoriales

Magnitudes escalares: Para expresar su valor basta con indicar una cantidad y la unidad correspondiente.
Ejemplos: Masa, tiempo, densidad, temperatura, presión, energía, trabajo…

Magnitudes vectoriales: Además de la cantidad y unidad, es necesario conocer su dirección y sentido.
Se representan mediante un vector.
Ejemplos: Posición, desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza…

Vectores

Un vector es la representación matemática de una magnitud vectorial. Consiste en un segmento orientado, que contiene toda la información sobre la magnitud que estamos midiendo.

Partes del vector:
- Módulo: Longitud del segmento (valor de la magnitud: cantidad + unidades)
- Dirección: La de la recta en la que se encuentra el vector (llamada *recta soporte*)
- Sentido: Viene dado por la flecha. Dentro de la dirección, será + ó - , dependiendo del criterio que hayamos escogido en un principio.
- Punto de aplicación (origen del vector): O. Extremo del vector: E

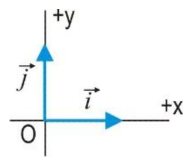
Vector hacia fuera del plano

Vector hacia dentro del plano

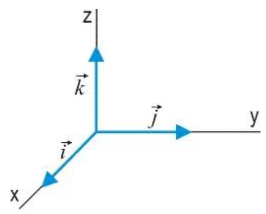
Sistema de referencia

Para localizar objetos y describir su movimiento, así como para expresar las magnitudes vectoriales, necesitamos establecer un sistema de referencia.

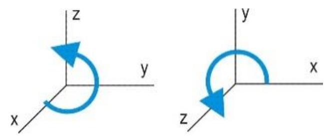
En el plano: Un punto (O , origen, pto desde el cual medimos)
Dos ejes perpendiculares, x e y.
El sentido positivo de cada eje viene marcado por un vector unitario (módulo = 1) : $\vec{i}, \vec{j}$



En el espacio: Punto origen (O)
Tres ejes: x , y, z. → tres vectores unitarios : $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



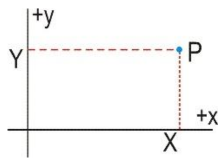
<u>Nota: Sistemas de referencia válidos:</u> En Física, por coherencia con algunas operaciones, como el producto vectorial, sólo son admisibles sistemas de referencia que sean dextrógiros, es decir, que podamos leer los ejes x, y, z por orden girando en el sentido positivo de los ángulos (dextrógiro o antihorario)



Coordenadas de un punto:

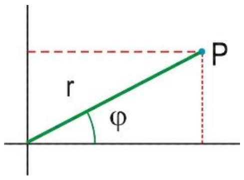
En el plano:

C. cartesianas: $P : (x , y)$



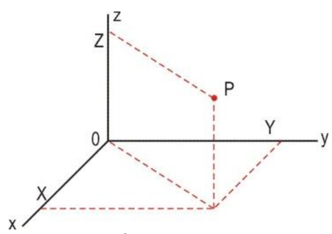
C. polares: $P: (r , \varphi)$

$x = r \cdot \cos \varphi$
$y = r \cdot \operatorname{sen} \varphi$



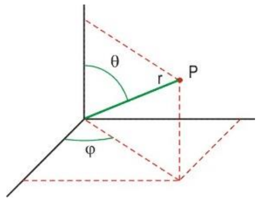
En el espacio:

C. cartesianas: $P : (x , y , z)$



C. polares: $P: (r , \varphi , \theta)$

$x = r \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \varphi$
$y = r \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} \varphi$
$z = r \cdot \cos \theta$



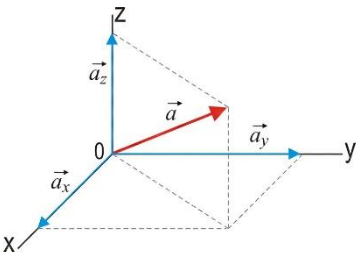
Características de un vector

Componentes de un vector:

Proyecciones del vector sobre los ejes coordenados.
Explicado de forma sencilla, indican cuánto hay que desplazarse en la dirección de cada eje para ir desde el origen del vector hasta su extremo.
El vector puede expresarse como la suma de sus componentes.

$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath} + a_z \cdot \vec{k}$ Es la forma más usada en Física.

Otra forma, muy usada en Matemáticas, es entre paréntesis $\vec{a} = (a_x\,, a_y\,, a_z)$



Módulo de un vector:

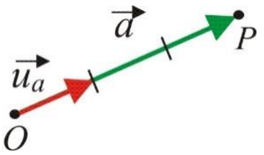
Es la longitud del vector, que representa el valor numérico de la magnitud física medida.

$|\vec{a}| = a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$ El módulo de un vector **siempre es positivo**.

Vector unitario:

Vector en la misma dirección y sentido que $\vec{a}$, pero con módulo 1.
Para obtenerlo, dividimos el vector por su módulo

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath} + a_z \cdot \vec{k}}{a} = \frac{a_x}{a} \cdot \vec{\imath} + \frac{a_y}{a} \cdot \vec{\jmath} + \frac{a_z}{a} \cdot \vec{k}$$



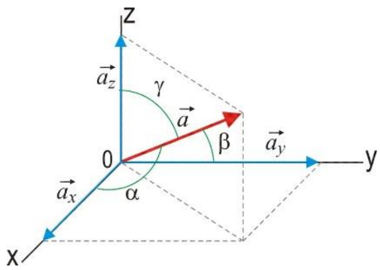
Vemos que podemos expresar el vector como $\vec{a} = a \cdot \vec{u}_a$
Es decir, separamos por un lado el módulo y por otro la dirección y el sentido

Cosenos directores:

Son los cosenos de los ángulos que forma el vector con los ejes coordenados.
Sus valores son las componentes del vector unitario $\vec{u}_a$

$$cos\alpha = \frac{a_x}{a}\ , \quad cos\beta = \frac{a_y}{a}\ , \quad cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

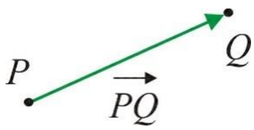
Se cumple que $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$



Vector entre dos puntos:

Se restan las coordenadas: coordenadas del extremo (Q) menos las coordenadas del origen (P)

$\overrightarrow{PQ} = (Q_x - P_x) \cdot \vec{\imath} + (Q_y - P_y) \cdot \vec{\jmath} + (Q_z - P_z) \cdot \vec{k}$

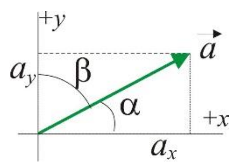


Descomposición de un vector en sus componentes:

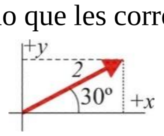
En el espacio, usamos los cosenos directores: $a_x = a \cdot cos\alpha$, $a_y = a \cdot cos\beta$, $a_z = a \cdot cos\gamma$
*(¡Ojo! Recuerda que los ángulos α , β, γ son los que forma el vector con los **semiejes positivos** x, y, z)*

En el plano, tenemos varias formas, en función de los ángulos que nos den en el problema.

<u>Cosenos directores</u>: $a_x = a \cdot cos\alpha$, $a_y = a \cdot cos\beta$
(ángulos con los semiejes positivos)

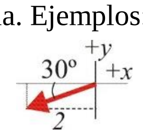


<u>Seno y coseno del ángulo que nos den</u>:
La componente contigua (pegada) al ángulo va multiplicada por $cos\alpha$ y la otra por $sen\alpha$.
De esta forma calculamos los módulos de las componentes (el valor absoluto). Posteriormente, debemos añadirle el signo que les corresponda, en función del sistema de referencia. Ejemplos:

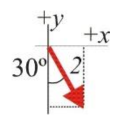


$a_x = 2 \cdot cos30º = 1{,}73$
$a_y = 2 \cdot sen30º = 1$
$\vec{a} = 1{,}73\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

$a_x = 2 \cdot sen30º = 1$
$a_y = 2 \cdot cos30º = 1{,}73$
$\vec{a} = -\vec{\imath} + 1{,}73\,\vec{\jmath}$

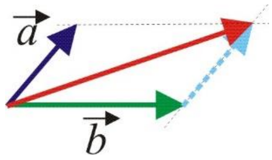


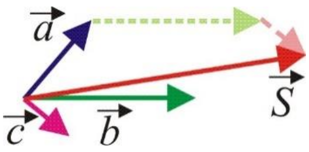
$a_x = 2 \cdot cos30º = 1{,}73$
$a_y = 2 \cdot sen30º = 1$
$\vec{a} = -1{,}73\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}$



$a_x = 2 \cdot sen30º = 1$
$a_y = 2 \cdot cos30º = 1$
$\vec{a} = \vec{\imath} - 1{,}73\,\vec{\jmath}$

Operaciones con vectores



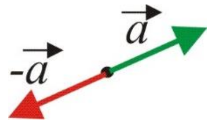


Suma de vectores:

$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\cdot\vec{\imath}+(a_y+b_y)\cdot\vec{\jmath}+(a_z+b_z)\cdot\vec{k}$

Opuesto de un vector: $(-\vec{a})$

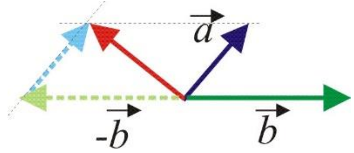
Vector con igual módulo y dirección que $\vec{a}$, pero en sentido contrario.



Diferencia entre vectores:

Restar dos vectores equivale a sumar a uno el opuesto del otro.

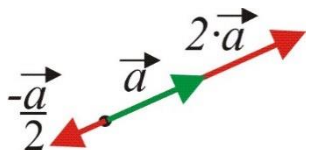
$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)=(a_x-b_x)\cdot\vec{\imath}+(a_y-b_y)\cdot\vec{\jmath}+(a_z-b_z)\cdot\vec{k}$



Producto (o división) por un número real: $(k\cdot\vec{a})$

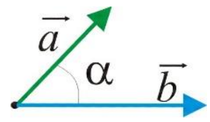
El módulo se multiplica (o divide) por el valor absoluto del número $(|k|\cdot a)$
La dirección no cambia
Sentido: El mismo si k > 0 El opuesto si k < 0

Con componentes: $k\cdot\vec{a}=k\cdot a_x\cdot\vec{\imath}+k\cdot a_y\cdot\vec{\jmath}+k\cdot a_z\cdot\vec{k}$



Producto escalar de dos vectores: $(\vec{a}\cdot\vec{b})$

El resultado de esta operación es un número real $\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cdot cos\alpha$



Algunas propiedades: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ Propiedad conmutativa

$\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2$

$\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}=\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ $\quad\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=\vec{\jmath}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{\imath}=0$

El signo del producto escalar depende del ángulo α.

$0<\alpha<90^\circ \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}>0$

$\alpha=90^\circ \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (Perpendicularidad)

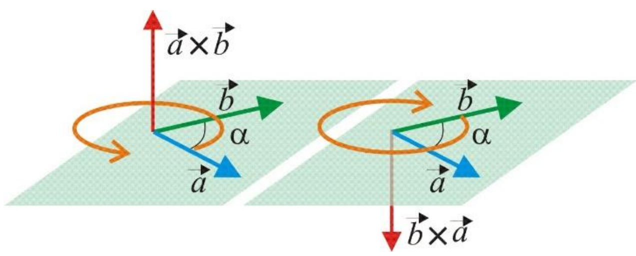
$\alpha>90^\circ \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}<0$

A partir de las componentes: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$

Ángulo α entre dos vectores: $cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{a\cdot b}$

Producto vectorial de dos vectores: $(\vec{a}\times\vec{b})$ $(\vec{a}\wedge\vec{b})$

El resultado de esta operación es un vector:



- Módulo: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=a\cdot b\cdot sen\alpha$
- Dirección: Perpendicular a ambos vectores
- Sentido: Regla del sacacorchos (o de la mano derecha) al girar desde $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$

Algunas propiedades:

$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (Propiedad anticonmutativa)

$\vec{a}\times\vec{a}=0$

$\vec{\imath}\times\vec{\imath}=\vec{\jmath}\times\vec{\jmath}=\vec{k}\times\vec{k}=0$ $\quad\vec{\imath}\times\vec{\jmath}=\vec{k}$ $\quad\vec{\jmath}\times\vec{k}=\vec{\imath}$ $\quad\vec{k}\times\vec{\imath}=\vec{\jmath}$

$\vec{\jmath}\times\vec{\imath}=-\vec{k}$ $\quad\vec{k}\times\vec{\jmath}=-\vec{\imath}$ $\quad\vec{\imath}\times\vec{k}=-\vec{\jmath}$

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos (forman 0º o 180º) $\rightarrow$ $\vec{a}\times\vec{b}=0$ (condición de paralelismo)

Cálculo a partir de las componentes: Usamos una operación matemática llamada *determinante*.

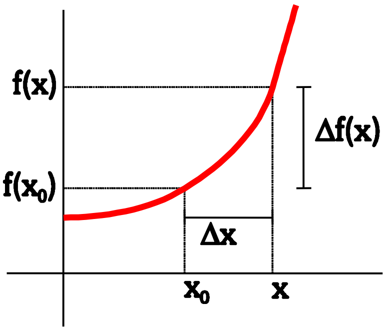
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(a_y\cdot b_z-a_z\cdot b_y\right)\vec{\imath}-\left(a_x\cdot b_z-a_z\cdot b_x\right)\vec{\jmath}+\left(a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x\right)\vec{k}$$

Derivadas

La derivada de una función en un punto indica cómo cambia la función respecto a un cambio infinitamente pequeño en la variable. Es decir, nos indica cómo de creciente o de decreciente es la función en ese punto.

- Matemáticamente, la derivada en un punto nos da el valor de la pendiente de la recta tangente a la función.
- En Física, al derivar una magnitud estamos calculando cómo varía esa magnitud al cambiar la variable de la que depende. Siempre que vayamos a estudiar cómo cambia una magnitud ($\vec{r}$, $\vec{v}$ ...) respecto al tiempo, o la distancia... usaremos las derivadas.

Definición: Dada f(x) $\dfrac{df_{(x)}}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f_{(x)}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



Propiedades fundamentales:

suma $\dfrac{d(f_{(x)} \pm g_{(x)})}{dx} = \dfrac{df_{(x)}}{dx} \pm \dfrac{dg_{(x)}}{dx}$ *La derivada de una suma (o diferencia) es la suma (o diferencia) de las derivadas.*

producto por nº $\dfrac{d(k \cdot f_{(x)})}{dx} = k \cdot \dfrac{df_{(x)}}{dx}$

Al multiplicar una función por un nº k, la derivada también se multiplica por k.

producto $\dfrac{d(f_{(x)} \cdot g_{(x)})}{dx} = \dfrac{df_{(x)}}{dx} \cdot g_{(x)} + f_{(x)} \cdot \dfrac{dg_{(x)}}{dx}$

cociente $\dfrac{d(f_{(x)} / g_{(x)})}{dx} = \dfrac{\dfrac{df_{(x)}}{dx} \cdot g_{(x)} - f_{(x)} \cdot \dfrac{dg_{(x)}}{dx}}{g_{(x)}^{\ 2}}$

Función	*Derivada*
k=cte	*0*
x	*1*
$k \cdot x$	k
$k \cdot x^n$	$k \cdot n \cdot x^{n-1}$
cos(k·x)	*- k · sen(k·x)*
sen(k·x)	*k ·cos(k·x)*
ln x	*1/x*
$\sqrt{f(x)}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot \dfrac{df(x)}{dx}$

Derivada de un vector: Para derivar una magnitud vectorial $\vec{a}$ cualquiera, se derivan sus componentes por separado. $\dfrac{d\vec{a}}{dt} = \dfrac{d\,a_x}{dt} \cdot \vec{i} + \dfrac{d\,a_y}{dt} \cdot \vec{j} + \dfrac{d\,a_z}{dt} \cdot \vec{k}$

Integrales indefinidas

Una función F(x) es la función integral (o función primitiva) de otra función f(x) cuando f(x) se obtiene al derivar F(x). Es decir, es la operación inversa a la derivada.

$$F(x) = \int f(x)\,dx \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{d[F(x)]}{dx}$$

Algunas propiedades:

$$\int [f_{(x)} \pm g_{(x)}]dx = \int f_{(x)}dx \pm \int g_{(x)}dx$$

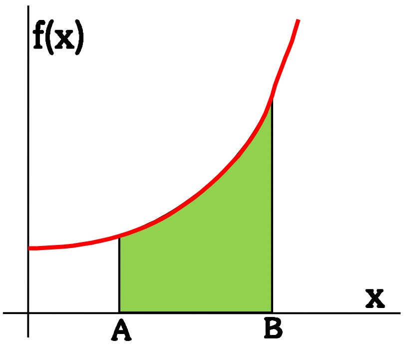
La integral de una suma (o diferencia) es la suma (o diferencia) de las integrales

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

Al multiplicar una función por un nº k cualquiera, la integral también se ve multiplicada por el mismo nº.

Algunas integrales inmediatas	
Función	*Integral*
0	*c = cte*
1	*x + c*
k	*k · x + c*
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
sen(x)	*- cos(x) + c*
cos(x)	*sen(x) + c*
1/x	*ln x + c*

Integrales definidas $\int_A^B f(x)\cdot dx$



El resultado de realizar una integral definida no es una función, sino un número real. Se calcula mediante la **Regla de Barrow**:

1º Se calcula la integral indefinida $F(x)=\int f(x)\,dx$

2º Se sustituye x por los valores de los extremos superior (B) e inferior (A). Obtenemos F(B) y F(A)

3º Hacemos F(B) – F(A)

- Matemáticamente, la integral definida entre dos valores de x (A y B) nos da el valor del área de la figura encerrada entre la curva de la función, el eje x, y los dos valores A y B.
- En Física, tiene muchas aplicaciones, dependiendo de qué magnitudes sean *f(x)* y *x*. Sobre todo, cuando hay que sumar la contribución de la magnitud f(x) a lo largo de un camino, como ya veremos en el caso del trabajo.

CINEMÁTICA (Descripción del movimiento de la partícula)

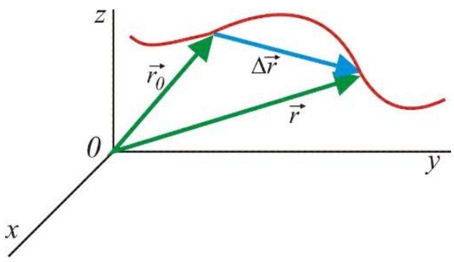
Decimos que un objeto está en movimiento cuando cambia de posición respecto a un punto que *consideramos* que está en reposo, es decir, respecto a un sistema de referencia.
Consideraremos los objetos móviles como puntos materiales, sin tamaño y sin forma, con toda su masa concentrada en ese punto.
El punto móvil describe una *trayectoria*, formada por todos los puntos por los que pasa. Describiremos el movimiento gracias a las magnitudes posición ($\vec{r}$), velocidad ($\vec{v}$) y aceleración ($\vec{a}$).

Vector de posición

Indica las coordenadas del móvil en cada instante, en función del tiempo.

$\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{\imath}+y(t)\cdot\vec{\jmath}+z(t)\cdot\vec{k}$ Unidades S.I: $[r]=m$ Módulo $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Si escribimos por separado las coordenadas *x(t)*, *y(t)* y *z(t)*, obtenemos la *ecuación de movimiento* (ecuaciones paramétricas de la trayectoria)



Posición inicial: $\vec{r}_0=\vec{r}(t=0)$. Es la posición que tiene el móvil cuando comenzamos a medir el movimiento.

Vector desplazamiento $\Delta\vec{r}=\vec{r}-\vec{r}_0$

(El vector desplazamiento sólo tiene en cuenta las posiciones inicial y final del móvil, no el camino recorrido sobre la trayectoria)

Velocidad:

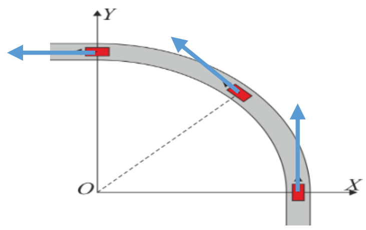
Indica cómo varía la posición del móvil con respecto al tiempo.

Velocidad media $\vec{v}_m=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ Medida en un intervalo $\Delta t=t-t_0$ $[v]=\dfrac{m}{s}=m\cdot s^{-1}$

(Sólo tiene en cuenta los puntos inicial y final)

Velocidad instantánea ($\vec{v}$): Indica cómo cambia $\vec{r}$ con el tiempo en cada instante. $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ $[v]=\dfrac{m}{s}=m\cdot s^{-1}$

La velocidad instantánea es tangente a la trayectoria en cada punto



Aceleración

Indica cómo cambia $\vec{v}$ con el tiempo $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ $[a] = \frac{m/s}{s} = m \cdot s^{-2}$

(Importante: la aceleración ***no*** *indica* <u>*cómo se mueve*</u> *el cuerpo, sino* <u>*cómo cambia*</u> *su movimiento)*

(Importante: el cuerpo no tiene por qué moverse en la dirección de la aceleración. $\vec{v}$ y $\vec{a}$ no tienen por qué ser paralelos. Sólo lo son en los movimientos rectilíneos. La dirección del movimiento tiende hacia la dirección y sentido de $\vec{a}$, pero no coinciden muchos movimientos (parabólico, circular...))

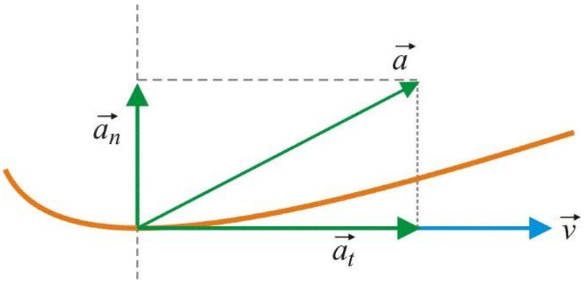
Siempre que cambie algo en la velocidad (ya sea el módulo o la dirección), el móvil sufre aceleración.

Componentes intrínsecas de la aceleración: Recordemos que la aceleración indica cómo cambia la velocidad, no hacia dónde se mueve el objeto. La dirección de $\vec{a}$, en general, no es tangente a la trayectoria. Podemos entonces descomponer el vector $\vec{a}$ en dos partes: una en la dirección de la velocidad (tangencial) y otra en dirección perpendicular (normal)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{u}_v)}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_v + v \cdot \frac{d\vec{u}_v}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \cdot \vec{u}_t + a_n \cdot \vec{u}_n$$

$$a^2 = a_t^{\,2} + a_n^{\,2}$$



<u>Ac.tangencial</u> $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_v$

· Modifica $|\vec{v}|$
· Va en la dirección de $\vec{v}$

$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$

<u>Ac. normal</u> $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{u}_n$

· Modifica la dirección de $\vec{v}$
· Es perpendicular a $\vec{v}$

$a_n = \frac{v^2}{R}$

R = radio de curvatura $\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ vector unitario tangente

<u>Un ejemplo sencillo</u>: En un automóvil la aceleración tangencial equivale a pisar el acelerador o el freno (aumenta o disminuye la rapidez, pero no desvía la trayectoria del automóvil). La aceleración normal se produce al mover el volante. El rozamiento de las ruedas con el suelo produce una aceleración hacia el centro de la curva, que desvía la trayectoria.

Movimientos de especial interés:

Mov. rectilíneo uniforme (MRU): $\vec{a} = 0$; $\vec{v} = cte$; $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot (t - t_0)}$

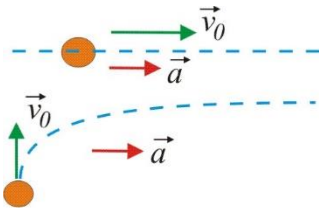
Normalmente $t_0 = 0\ s$; $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t}$

La trayectoria es siempre una línea recta.

Mov. uniformemente acelerado (MUA): $\vec{a} = \text{cte}$ *(considerando $t_0 = 0\ s$)*

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\ t \\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\ \vec{a} \cdot t^2 \end{array}}$$

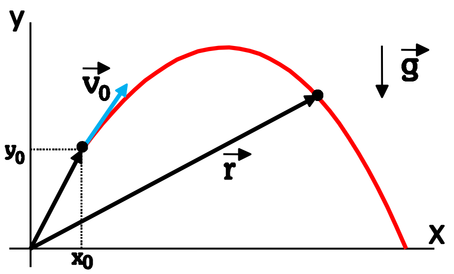
La trayectoria puede ser $\left\{ \begin{array}{l} \text{Recta: si } \vec{v}_0 \text{ y } \vec{a} \text{ son paralelas (MRUA)} \\ \text{Curva (parabólica): si } \vec{v}_0 \text{ y } \vec{a} \text{ no son paralelas} \end{array} \right.$



<u>Tiro parabólico:</u> Cuerpo que es lanzado en las proximidades de la superficie terrestre, y que sólo sufre la fuerza gravitatoria, que consideramos constante. $\vec{a} = \vec{g} \sim -9{,}8\ \vec{j}\ m/s^2$ → Es un MUA

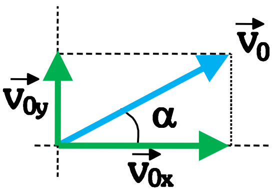
La trayectoria es parabólica si $\vec{v}_0$ no es paralela a $\vec{g}$

Ecuaciones del movimiento $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\ \vec{g} \cdot t^2$ — $\boxed{\begin{array}{l} x = x_o + v_{ox} \cdot t \\ y = y_o + v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2}\ g \cdot t^2 \end{array}}$



$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$ — $\boxed{\begin{array}{l} v_x = v_{ox} = cte \\ v_y = v_{oy} - g \cdot t \end{array}}$

Descomposición de $\vec{v}_0$:

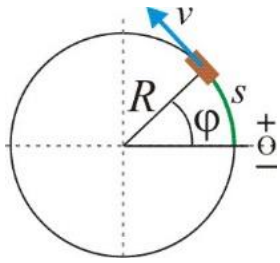


$v_{ox} = v_o \cdot \cos\alpha$

$v_{oy} = v_o \cdot sen\ \alpha$

> **Importante:**
> 1. El que haya que multiplicar por $sen\alpha$ o $cos\alpha$ depende de qué ángulo nos den.
> 2. Una vez calculados los módulos de las componentes, debemos darle su signo, en función del S.R. escogido

Movimiento Circular Uniforme (MCU):

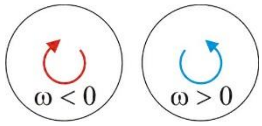


Movimiento con $a_t = 0$ *(uniforme, v = cte)* ; $a_n = cte \rightarrow R = cte$ *(circular)*

Para estudiar este movimiento es más útil usar coordenadas polares $(r\ ,\ \varphi)$. Como el radio es constante ($r = R$), la posición del móvil viene marcada sólo por el ángulo φ.

Posición angular: $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ $[\varphi] = rad$ (ecuación de movimiento)

Velocidad angular: $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = cte$ $[\omega] = rad \cdot s^{-1}$



Periodo: Tiempo en dar una vuelta. $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ $[T] = s$

Frecuencia: nº de vueltas por segundo $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ $[\,f\,] = s^{-1}$ = Hz (hercio)

Aceleración $a = a_n = \omega^2 \cdot R = \dfrac{v^2}{R}$

Relación entre magnitudes angulares y lineales:

$s = \varphi \cdot R$
$v = \omega \cdot R$
$a_n = \omega^2 \cdot R$
$a_t = \alpha \cdot R$

Movimiento Circular Uniformemente Acelerado (MCUA):

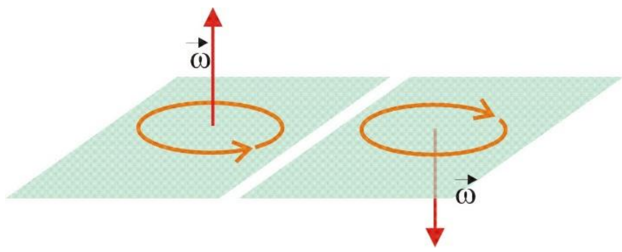
Este movimiento describe circunferencias, pero con velocidad variable (creciente o decreciente). La velocidad angular ω varía debido a que existe aceleración angular $\alpha = cte$

$\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ $[\alpha] = rad \cdot s^{-2}$ como α = cte $\rightarrow$ $\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$ (ec. de la velocidad)

Relación con la aceleración lineal $a_t = \alpha \cdot R$

Ecuación del MCUA: $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\ \alpha \cdot t^2$

Nota de ampliación: Las magnitudes φ , ω , α , que tratamos como magnitudes escalares, en realidad son magnitudes vectoriales ($\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$) , ya que todas las magnitudes que describen los giros poseen una determinada dirección: la del eje respecto al que gira el cuerpo. El sentido del vector viene dado por el sentido de giro, aplicando la regla del sacarcorchos.



Las relaciones entre las magnitudes angulares y lineales vienen determinadas por productos vectoriales:

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Problemas Tema 0: Vectores, cinemática

1.- Sean los puntos: A: (4,2,-1); B: (-1,3,0); C: (0,-1,5); D: (2,2,2); P: (-1,2,3)

a) Calcular los vectores: $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$ $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$ $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$ $\vec{d} = \overrightarrow{PD}$

b) Calcular: $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} + \vec{c}$; $\vec{a} + \vec{d}$; $\vec{b} + \vec{c}$; $\vec{b} + \vec{d}$; $\vec{c} + \vec{d}$; $7 \cdot \vec{a}$; $2 \cdot \vec{b}$; $-3 \cdot \vec{c}$; $-4 \cdot \vec{d}$; $6 \cdot \vec{a} - \vec{b}$; $3 \cdot \vec{b} - \vec{c}$; $4 \cdot \vec{d} - 5 \cdot \vec{a}$; $\vec{u}_a$; $\vec{u}_c$

c) Calcular: $\vec{d} \cdot \vec{a}$; $\vec{b} \cdot 2\,\vec{c}$; $3\,\vec{a} \cdot (-2\,\vec{c})$; $\vec{a} \times \vec{b}$; $\vec{c} \times \vec{d}$; $2\,\vec{a} \times \vec{d}$; $\vec{c} \times \vec{b}$; $(\vec{b} + \vec{c}) \times 2\,\vec{a}$; $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d})$; $\vec{c} \cdot (\vec{d} \times \vec{a})$

2.- a) Calcular la derivada respecto al tiempo de las siguientes funciones:

$4\,t^2 - 5t + 1$; $3\cos(4\,t)$; $t - ½\,t^3 + \ln t$

b) Calcular el vector derivada respecto al tiempo de los siguientes vectores:

$\vec{a} = 3t^2\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + (5t + 3t^2)\,\vec{k}$; $\vec{b} = -2t\,\vec{j} + \mathrm{sen}t\,\vec{k}$; $\vec{c} = \ln t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} - 3t^3\,\vec{k}$

c) Calcular $\int 3x^2\,dx$ $\int 6x^4 + 3x\,dx$ $\int_1^3 3x^2\,dx$ $\int_0^{\pi} sen(x)\,dx$

3.- La fórmula que nos da la posición de una partícula que se mueve en línea recta es:

$x = 7t^3 - 2t^2 + 3t - 1$ (m) (es decir, $\vec{r} = (7t^3 - 2t^2 + 3t - 1)\,\vec{i}$ (m))

Calcular los vectores velocidad y aceleración, la posición y la velocidad inicial, la posición a los 2 s y a los 3 s, y el desplazamiento entre t = 2 s. y t = 3 s.

4.- Una partícula lleva un movimiento en el eje X y en el eje Y de forma que la ecuación del vector de posición es:

$\vec{r} = (6t - 5)\,\vec{i} + (2\,t^2 - 4\,t + 3)\,\vec{j}$ (m). Calcular:

a) Expresiones del vector velocidad y del vector aceleración.

b) Expresión, en función del tiempo, del módulo de la velocidad.

c) Velocidad y posición iniciales.

d) Vector desplazamiento entre t = 2 s. y t = 3 s.

5.- Un cuerpo se desplaza hacia la derecha del eje X (semieje positivo) con una velocidad constante de 3 m s^{-1}. En el instante inicial se encuentra a 1 m. a la derecha del origen de coordenadas en el eje X. Determinar:

a) Vector de posición en cualquier instante

b) Vector desplazamiento y distancia recorrida entre t = 2 s. y t = 6 s.

c) Vectores velocidad y aceleración en cualquier instante.

6.- El movimiento de una partícula viene dado por $x = 2t + 3$; $y = t^2 + 5$; $z = t + 2$. (coordenadas dadas en metros).

Calcular $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Calcular también un vector unitario tangente a la trayectoria para t = 1 s.

7.- En un movimiento se sabe que: $\vec{a}_n = 0$, $\vec{a}_t = 2\,\vec{i}$ m s^{-2}, y para t = 1 s, se cumple que

$\vec{v}\,(1) = 2\,\vec{i}$ m/s y $\vec{r}\,(1) = \vec{i} + \vec{j}$ m Calcular $\vec{v}$ y $\vec{r}$ para cualquier instante.

8. De un movimiento sabemos que se encuentra sometido únicamente a la acción de la gravedad, y que inicialmente se encontraba en el origen, moviéndose con una velocidad $\vec{v}_0 = 3\,\vec{i} - \vec{j}$ m/s. Calcula $\vec{r}$ y $\vec{v}$ para cualquier instante. $(\vec{g} = -9{,}8\,\vec{j}\,m\,s^{-2})$

9.- Desde una azotea soltamos una piedra de 1 kg en caída libre. Llega al suelo con una velocidad de 20 m s^{-1}. Despreciando el rozamiento con el aire:

a) Calcula la altura de la azotea y el tiempo que tarda en caer.

b) ¿Cómo cambiaría el problema si la masa de la piedra fuera de 2 kg?

10.- Una pelota cae desde un tejado situado a 10 m de altura y que forma 30º con la horizontal, con una velocidad de 2 m s^{-1}. Calcula: a) ¿A qué distancia de la pared choca con el suelo? ; b) velocidad que lleva al llegar al suelo (desprecia el rozamiento con el aire)

11.- Un avión, que vuela a 500 m de altura y 100 m s^{-1} deja caer un paquete con provisiones a una balsa. ¿Desde qué distancia horizontal debe dejar caer el paquete para que caiga 10 m delante de la balsa? (despreciar el rozamiento).

12.- Un globo se encuentra inicialmente a 50 m de altura, y sufre una aceleración ascensional de 2 m s^{-2}. El viento hace que el globo tenga desde el principio una componente horizontal de velocidad constante e igual a 5 m s^{-1}.
a) ¿Qué tipo de movimiento es? b) Calcula la ecuación de movimiento;
c) Altura cuando ha avanzado horizontalmente 100 m.

Cuestiones teóricas:

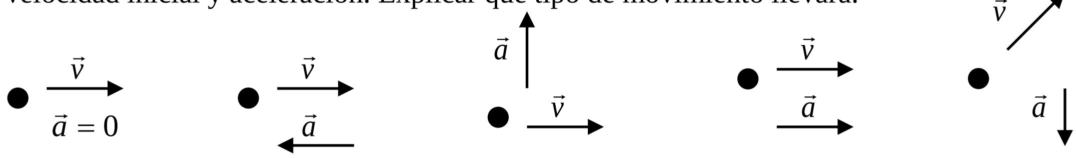
1. Razonar:
a) ¿Puede el módulo de un vector ser menor que 1? ¿Puede ser negativo?
b) ¿Qué condición deben cumplir dos vectores para que sean perpendiculares? ¿Y para que sean paralelos?
c) ¿Qué condición debe cumplirse para que una función que depende del tiempo se mantenga constante?

2. Al resolver una cuestión, obtenemos que cierto ángulo α depende de dos magnitudes *a* y *b* según la expresión $sen\alpha = \frac{a}{b}$. Razone la veracidad o falsedad de estas afirmaciones:
a) *a* no puede ser mayor que *b*
b) Al duplicar *a* manteniendo *b* constante, se duplica también el ángulo α.
c) $senb = \frac{a}{\alpha}$

3. ¿Posee aceleración un coche que toma una curva a 60 km/h? Explicar

4. Indicar qué características tendrán los siguientes movimientos, dados por:
a) $\vec{v}$ = cte b) v = cte; c) $\vec{a}$ = cte con $\vec{a} \parallel \vec{v}_o$
g) a_n = cte , $a_t = 0$ e) a_n aumenta , $a_t = 0$ f) $\vec{a}$ = cte con $\vec{a}$ no $\parallel \vec{v}_o$ g) $a_n = 0$

5. Dibujar la trayectoria aproximada que seguiría en cada caso el punto móvil de la figura, atendiendo a los datos de velocidad inicial y aceleración. Explicar qué tipo de movimiento llevará.



6.
a) Se suelta con velocidad nula un objeto desde una altura h. considerando la aceleración de la gravedad constante e igual a g, deduzca la expresión del tiempo que tarda en llegar al suelo, y de la velocidad con la que llega al suelo.
b) Si se duplica la altura h, ¿cómo se modifica el tiempo de caída? ¿y la velocidad al llegar al suelo? Razone.

7. Dos móviles A y B describen movimientos circulares uniformes de distinto radio ($r_A = 2 \cdot r_B$), pero igual periodo. Determine razonadamente la relación existente entre: i) sus velocidades, ii) sus velocidades angulares, iii) sus aceleraciones.

Soluciones a los problemas:

1.- a) (5,0,-4) ; (0,1,-3) ; (1,-3,2) ; (3,0,-1)
b) (5,1,-7) ; (6,-3,-2) ; (8,0,-5) ; (1,-2,-1) ; (3,1,-4) ; (4,-3,1); (35,0,-28) ; (0,2,-6) ; (-3,9,-6); (-12,0,4); (30,-1,-21) ; (-1,6,-11) ; (-13,0,16) ; (0.781, 0 , -0.625) ; (0.267 , -0.802 , 0.535)
c) 19 ; -18 ; 18 ; (4,15,5) ; (3,7,9) ; (0,-14,0) ; (7,3,1) ; (16,-2,20) ; 7 ; -21

2.- $8t - 5$; $-12 \, sen(4t)$; $1 - 3/2\, t^2 + 1/x$
$6t\,\vec{i} + (5 + 6t)\,\vec{k}$; $-2\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$; $1/t\,\vec{i} - 2\,\mathrm{sen}\,t\,\vec{j} - 9t^2\,\vec{k}$
x^3 ; $6/5\, x^5 + 3/2\, x^2$; 26 ; 2

3.- $\vec{v} = (21\,t^2 - 4t + 3)\,\vec{i}$ (m s^{-1}) ; $\vec{a} = (42\,t - 4)\,\vec{i}$ (m s^{-2}) ; x(0) = -1 m ; v(0) = 3 m s^{-1} ; $\vec{r}\,(2) = 53\,\vec{i}$ m ; $\vec{r}\,(3) = 179\,\vec{i}$ m ; $\Delta x = 126$ m

4.- a) $\vec{v} = 6\,\vec{i} + (4\,t - 4)\,\vec{j}$ m s^{-1} ; $\vec{a} = 4\,\vec{j}$ m s^{-2} ; b) $\sqrt{16t^2 - 32t + 52}$ m s^{-1}

c) $\vec{r}\,(0) = -5\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ (m) ; $\vec{v}\,(0) = 6\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$ (m s^{-1}) ; d) $\Delta\vec{r} = 6\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$ (m)

5.- a) $\vec{r} = (3t + 1)\,\vec{i}$ m ; b) $\Delta\vec{r} = 12\,\vec{i}$ m ; $\Delta r = 12$ m c) $\vec{v} = 3\,\vec{i}$ m s^{-1}; $\vec{a} = 0$ m s^{-2}

6.- $\vec{r} = (2t + 3)\,\vec{i} + (t^2 + 5)\,\vec{j} + (t+2)\,\vec{k}$ m ; $\vec{v} = 2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + \vec{k}$ m s^{-1} ; $\vec{u}_t(1) = (\,2/3\,,\,2/3\,,\,1/3\,)$

7.- $\vec{v} = 2\,t\,\vec{i}$ (m s^{-1}) ; $\vec{r} = t^2\,\vec{i} + \vec{j}$ (m)

8.- $\vec{v} = 3\,\vec{i} - (1 + 9{,}8\,t)\,\vec{j}$ m s^{-1} ; $\vec{r} = 3\,t\,\vec{i} - (t - 4{,}9\,t^2)\,\vec{j}$ m

9.- a) h = 20,39 m ; t = 2,04 s b) En ausencia de rozamiento con el aire, la masa de la piedra no influye.

10.- a) 2,30 m ; b) $1{,}73\,\vec{i} - 14{,}04\,\vec{j}$ m/s

11.- 1020,15 m (ó 1000,15 m, según se interprete la expresión “delante de la balsa”. El alcance es de 1010,15 m)

12.- b) $\vec{r} = 5\,t\,\vec{i} + (50 + t^2)\,\vec{j}$ m ; c) 450 m.