ALGUNOS EJERCICIOS RESUELTOS DEL TEMA 0. VECTORES. CINEMÁTICA.

1. $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$ $\quad \vec{a} = (4\,,2\,,-1) - (-1\,,2,3) = (5\,,0\,,-4) = 5\,\vec{\imath} - 4\,\vec{k}$

$\vec{b} = \overrightarrow{PB}$ $\quad \vec{b} = (-1\,,3\,,0) - (-1\,,2,3) = (0\,,1\,,-3) = \vec{\jmath} - 3\,\vec{k}$

$6 \cdot \vec{a} - \vec{b} = 6 \cdot \left(5\,\vec{\imath} - 4\,\vec{k}\right) - \left(\vec{\jmath} - 3\,\vec{k}\right) = \left(30\vec{\imath} - 24\,\vec{k}\right) - \left(\vec{\jmath} - 3\,\vec{k}\right) = 30\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 21\,\vec{k}$ (30, -1 , -21)

$\vec{d} \cdot \vec{a} = (3\,,0,-1) \cdot (5\,,0\,,-4) = 3 \cdot 5 + 0 + (-1) \cdot (-4) = 19$

$\vec{u}_c = \frac{\vec{c}}{c} = \frac{\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+2\vec{k}}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}} = \frac{\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+2\vec{k}}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{\imath} - \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{\jmath} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{k} = 0{,}267\,\vec{\imath} - 0{,}802\,\vec{\jmath} + 0{,}535\,\vec{k}$

$$\vec{c} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \left((-3)\cdot(-1) - 0 \cdot 2\right)\vec{\imath} - \left(1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2\right)\vec{\jmath} + \left(1 \cdot 0 - 3 \cdot (-3)\right)\vec{k} =$$

$= 3\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + 9\vec{k}$ (3 , 7 , 9)

$\boldsymbol{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d})}$ **= 7**

$$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} + 9\vec{\jmath} - 3\vec{k}$$ (-1 , 9 , -3)

$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{d}\right)$ = (5 , 0 , -4) · (-1 , 9 , -3) = -5 + 0 + 12 = **7**

2. $\vec{a} = 3t^2\,\vec{\imath} - 2\,\vec{\jmath} + (5t + 3t^2)\,\vec{k}$ $\quad \frac{d\vec{a}}{dt} = 6t\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath} + (5 + 6t)\vec{k} = 6t\,\vec{\imath} + (5 + 6t)\vec{k}$

$\int_1^3 3x^2\,dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_1^3 = 27 - 1 = 26$

4.- Una partícula lleva un movimiento en el eje X y en el eje Y de forma que la ecuación del vector de posición es: $\vec{r}$ **= (6t - 5)** $\vec{\imath}$ **+ (108 t² - 108 t + 80)** $\vec{\jmath}$ **(m). Calcular:**

a) Expresiones del vector velocidad y del vector aceleración

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6\,\vec{\imath} + (216t - 108)\vec{\jmath}\,(ms^{-1})$ $\qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 216\,\vec{\jmath}\,(ms^{-2})$

b) Expresión, en función del tiempo, del módulo de la velocidad.

$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{36 + (216t - 108)^2} = \sqrt{46656 \cdot t^2 - 46656 \cdot t + 11700}$ m s^{-1}

c) Posición y velocidad iniciales.

$\vec{r}_0 = \vec{r}(t = 0) = -5\,\vec{\imath} + 80\,\vec{\jmath}\,m$ $\qquad \vec{v}_0 = \vec{v}(t = 0) = 6\,\vec{\imath} + 216\,\vec{\jmath}\,ms^{-1}$

d) Vector desplazamiento entre t = 2 s. y t = 3 s.

$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = (13\vec{\imath} + 728\vec{\jmath})m - (7\vec{\imath} + 296\vec{\jmath})m = 6\vec{\imath} + 432\vec{\jmath}\,m$

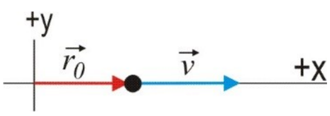
5.- Un cuerpo se desplaza hacia la derecha del eje X (semieje positivo) con una velocidad constante de 3 m/s. En el instante inicial se encuentra a 1 m. a la derecha del origen de coordenadas en el eje X. Determinar:

a) Vector de posición en cualquier instante

b) Vector desplazamiento y distancia recorrida entre t = 2 s. y t = 6 s.

c) Vectores velocidad y aceleración en cualquier instante.

El enunciado nos indica que la velocidad es constante, tanto en módulo, como en dirección y sentido. Se trata, por tanto, de un movimiento rectilíneo uniforme (MRU)



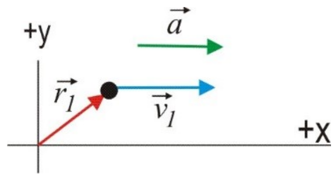
a) La ecuación de movimiento nos dice la posición en cualquier instante $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t$

Datos: $\vec{r}_0 = \vec{\imath}\, m$ $\quad \vec{v} = 3\,\vec{\imath}\, ms^{-1}$ $\quad \vec{r} = \vec{\imath} + 3\,\vec{\imath}\cdot t \rightarrow \vec{r} = (1 + 3\cdot t)\,\vec{\imath}\,(m)$

b) $\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_6 - \vec{r}_2 = 19\,\vec{\imath} - 7\,\vec{\imath} = 12\,\vec{\imath}\ m$ En módulo: $\Delta r = 12\ m$ es la distancia recorrida.

c) como es un MRU, la velocidad es constante $\vec{v} = 3\,\vec{\imath}\, ms^{-1}$ y la aceleración es nula.

7.- En un movimiento se sabe que: $\vec{a}_n = 0$, $\vec{a}_t = 2\ \vec{\imath}$ (m/s²), y para t = 1 s, se cumple que $\vec{v}\,(1) = 2\ \vec{\imath}$ m/s y $\vec{r}\,(1) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ m Calcular $\vec{v}$ y $\vec{r}$ para cualquier instante.



Para resolver este problema, vemos en primer lugar el tipo de movimiento que es.
La aceleración que sufre es: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = 0 + 2\,\vec{\imath} = 2\,\vec{\imath}\ ms^{-2}$
Es una aceleración constante, por lo que se trata de un movimiento uniformemente acelerado (MUA)

Las ecuaciones de este movimiento serán: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\vec{a}\cdot t^2$

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot t$

Desconocemos los valores iniciales $\vec{r}_0$ y $\vec{v}_0$ Pero nos dan los datos de posición y velocidad para t = 1 s.
Sustituimos en las ecuaciones

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot t \rightarrow 2\cdot\vec{\imath} = \vec{v}_0 + 2\cdot\vec{\imath}\cdot 1 \rightarrow \vec{v}_0 = 0$ m/s

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\vec{a}\cdot t^2 \rightarrow \vec{\imath} + \vec{\jmath} = \vec{r}_0 + 0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\vec{\imath}\cdot(1)^2 \rightarrow \vec{r}_0 = \vec{\jmath}$ m

Sustituimos en las ecuaciones: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot t \rightarrow \vec{v} = 0 + 2\cdot\vec{\imath}\cdot t \rightarrow \vec{v} = 2t\cdot\vec{\imath}\ (ms^{-1})$

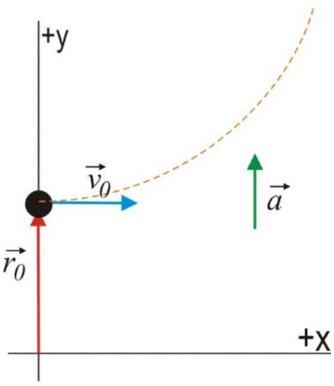
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\vec{a}\cdot t^2 \rightarrow \vec{r} = \vec{\jmath} + 0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot 2\vec{\imath}\cdot t^2 \rightarrow \vec{r} = \vec{\jmath} + t^2\,\vec{\imath}\ (m)$$

11.- Un globo se encuentra inicialmente a 50 m de altura, y sufre una aceleración ascensional de 2 ms^{-2}. El viento hace que el globo tenga desde el principio una componente horizontal de velocidad constante e igual a 5 m/s.

a) ¿Qué tipo de movimiento es?

b) Calcula la ecuación de movimiento;

c) Altura cuando ha avanzado horizontalmente 100 m.



a) El enunciado dice que el globo sufre una aceleración hacia arriba de 2 ms^{-2}, que es constante. Por tanto, se trata de un movimiento uniformemente acelerado. La trayectoria será parabólica, ya que la dirección de la velocidad inicial no coincide con la de la aceleración.

b) Datos: $\vec{a} = 2\,\vec{\jmath}\, ms^{-2}$ $\quad \vec{r}_0 = 50\,\vec{\jmath}\ m$ $\quad \vec{v}_0 = 5\,\vec{\imath}\ m/s$

Sustituimos en la ecuación de movimiento $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\vec{a}\cdot t^2$

$\vec{r} = 50\,\vec{\jmath} + 5\,\vec{\imath}\cdot t + \frac{1}{2}\cdot 2\,\vec{\jmath}\cdot t^2$ Agrupamos $\vec{r} = 5t\,\vec{\imath} + (50 + t^2)\vec{\jmath}\,(m)$ $\begin{cases} x = 5t\ (m) \\ y = 50 + t^2\ (m) \end{cases}$

c) Dato: Avanza 100 m en horizontal. x = 100 m. sustituimos, despejamos el tiempo y sustituimos en y.

100 = 5 · t $\rightarrow$ *t = 20 s*

y = 50 + t² = 50 + (20)² = 450 m.