1.

a) Obi Wan Kenobi se desplaza con su nave espacial a cierta distancia del planeta Tatoouine. Observa, sorprendido, que la gravedad del planeta realiza un trabajo negativo sobre la nave. Razone, justificando las respuestas:
i) ¿Qué ocurre con la energía potencial de la nave? ii) ¿Se acerca o se aleja del planeta?

b) Dos masas puntuales de 5 kg se encuentran en los puntos (0,2) y (0,- 2) m respectivamente. Calcule, ayudándose de esquemas:
i) Intensidad del campo gravitatorio en el punto A: (- 4,0) m.
ii) Potencial gravitatorio en el mismo punto.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

2.

a) Explique el concepto de velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión.

b) Un objeto de 2000 kg se encuentra en la superficie de un planeta cuya masa es la mitad de la terrestre y cuyo radio es también la mitad del radio terrestre. Calcule razonadamente:
i) Peso del objeto en la superficie del planeta.
ii) Trabajo necesario para llevar el objeto desde la superficie del planeta hasta una altura igual al radio del planeta.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km

3.

a) Dos satélites A y B, con masas idénticas, describen órbitas circulares en torno a un mismo planeta. El radio de la órbita del satélite B es del doble del radio correspondiente al satélite A. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
i) El periodo de revolución del satélite B será el doble del periodo de revolución correspondiente al satélite A.
ii) Ambos satélites poseen la misma energía mecánica, ya que ésta se mantiene constante.

b) Un satélite del sistema de posicionamiento GPS, de 1200 kg, se encuentra en una órbita circular a una altura sobre la superficie igual a 3 R_T. Calcule razonadamente:
i) Velocidad orbital del satélite.
ii) Energía del satélite en la órbita.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $g_{0T} = 9{,}8$ N/kg ; $R_T = 6370$ km

1. a) Obi Wan Kenobi se desplaza con su nave espacial a cierta distancia del planeta Tatoouine. Observa, sorprendido, que la gravedad del planeta realiza un trabajo negativo sobre la nave. Razone, justificando las respuestas:

i) ¿Qué ocurre con la energía potencial de la nave? ii) ¿Se acerca o se aleja del planeta?

i) La fuerza gravitatoria es conservativa, por lo que tiene asociada una energía potencial gravitatoria de forma que $\Delta E_{pg} = -W_{Fg}$

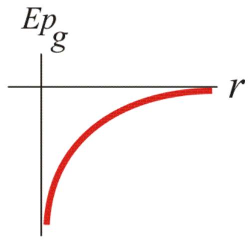
Si el trabajo realizado es negativo, significa que la energía potencial gravitatoria aumenta ($\Delta E_{pg} > 0$)

ii) La fuerza gravitatoria que ejerce un planeta sobre un objeto situado a cierta distancia del mismo es una interacción central, dirigida hacia el centro del planeta.

Por otro lado, sabemos que si el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es negativo. La fuerza se opone al desplazamiento. Es decir, se desplaza en sentido contrario a la fuerza. Como la fuerza apunta hacia el planeta, la nave espacial se aleja del planeta.

(Razonado de otra forma: Sabemos por el apartado i) que la energía potencial gravitatoria aumenta. Como podemos ver en la gráfica, Epg aumenta con la distancia a M. Por lo tanto, la nave se aleja del planeta.)

$$Ep_g = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

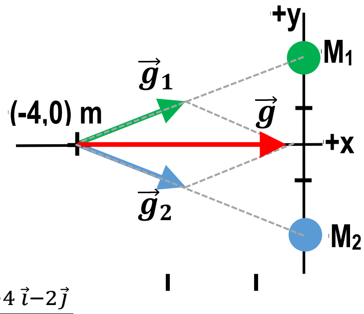


b) Dos masas puntuales de 5 kg se encuentran en los puntos (0,2) y (0,- 2) m respectivamente. Calcule, ayudándose de esquemas:

i) Intensidad del campo gravitatorio en el punto A: (- 4,0) m.

ii) Potencial gravitatorio en el mismo punto.

G = 6,67 ·10^{-11} N m^2 kg^{-2} .



i) Tenemos dos masas que crean campo gravitatorio en el mismo punto.

Aplicamos el principio de superposición

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

$$\vec{r}_1 = (-4{,}0) - (0{,}2) = -4\,\vec{\imath} - 2\,\vec{\jmath}\,m \qquad r_1 = \sqrt{20}\,m \qquad \vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{-4\,\vec{\imath}-2\vec{\jmath}}{\sqrt{20}}$$

$$\vec{g}_1 = -\frac{GM_1}{{r_1}^2}\vec{u}_{r1} = -\frac{6.67\cdot 10^{-11} N\,m^2\,kg^{-2}\cdot 5\,kg}{20\,m^2}\cdot\frac{-4\,\vec{\imath}-2\vec{\jmath}}{\sqrt{20}} = 1{,}49\cdot 10^{-11}\,\vec{\imath} + 7{,}46\cdot 10^{-12}\vec{\jmath}\ \frac{N}{kg}$$

$$\vec{r}_2 = (-4{,}0) - (0,-2) = -4\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath}\,m \qquad r_2 = \sqrt{20}\,m \qquad \vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{-4\,\vec{\imath}+2\vec{\jmath}}{\sqrt{20}}$$

$$\vec{g}_2 = -\frac{GM_2}{{r_2}^2}\vec{u}_{r2} = -\frac{6.67\cdot 10^{-11} N\,m^2\,kg^{-2}\cdot 5\,kg}{20\,m^2}\cdot\frac{-4\,\vec{\imath}+2\vec{\jmath}}{\sqrt{20}} = 1{,}49\cdot 10^{-11}\,\vec{\imath} - 7{,}46\cdot 10^{-12}\vec{\jmath}\ \frac{N}{kg}$$

El campo total $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 2{,}98\cdot 10^{-11}\,\vec{\imath}\ \frac{N}{kg}$

ii) Aplicando el principio de superposición

$$V = V_1 + V_2 = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} = -1{,}49\cdot 10^{-10}\ J\cdot kg^{-1}$$

$M_1 = M_2 = 5\,kg$

$r_1 = r_2 = \sqrt{20}\,m = 4{,}47\,m$

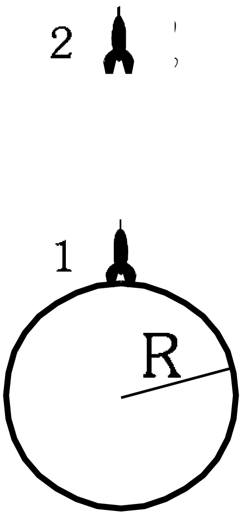
2. a) Explique el concepto de velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión.

Se define como la velocidad a la que habría que lanzar un cuerpo desde la superficie del planeta para que escapara de su atracción gravitatoria, alejándose indefinidamente. En este cálculo se desprecia el rozamiento con la atmósfera.

En primer lugar tenemos en cuenta que, al no tener en cuenta el rozamiento, la única fuerza que va a actuar sobre el movimiento del cohete será la gravitatoria, que es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica del cohete se mantendrá constante. Datos: M, R: masa y radio del planeta m: masa del proyectil

Sistemas de referencia: mediremos las distancias desde el centro del planeta.

El origen de energía potencial gravitatoria lo colocamos a una distancia infinita del centro planetario, por lo que la expresión usada para la Epg será $Ep_g = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$



Situación inicial (1): Lanzamiento del cohete desde la superficie terrestre con velocidad v_e.

$$Ec_1 = \tfrac{1}{2} m v_e^{\,2} \qquad Ep_{g1} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

$$E_{M1} = Ec + Ep_g = \tfrac{1}{2} m v_e^{\,2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

Situación final (2): el cohete se aleja indefinidamente. En el límite cuando la distancia r tiende a infinito, la velocidad (y la Ec) tiende a cero, al igual que la energía potencial, ya que el origen de Ep está colocado en el infinito.

$$E_{M2} = \lim_{r\to\infty} E_M = \lim_{r\to\infty} (Ec + Ep_g) = 0$$

Aplicando la conservación de la energía mecánica:

$$E_{M2} = E_{M1} \Rightarrow \tfrac{1}{2} m v_e^{\,2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2} \cancel{m} v_e^{\,2} = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{R} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

b) Un objeto de 2000 kg se encuentra en la superficie de un planeta cuya masa es la mitad de la terrestre y cuyo radio es también la mitad del radio terrestre. Calcule razonadamente:
i) Peso del objeto en la superficie del planeta.
ii) Trabajo necesario para llevar el objeto desde la superficie del planeta hasta una altura igual al radio del planeta.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km

i) El peso del objeto (la fuerza gravitatoria) en la superficie viene dado por $Fg = m \cdot g_0$ donde g_0 es la gravedad en la superficie del planeta.

$$g_0 = \frac{G \cdot M}{R^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 2{,}99 \cdot 10^{24} kg}{\left(3{,}185 \cdot 10^6 m\right)^2} = 19{,}66 \ \frac{N}{kg}$$

Y el peso $Fg = m \cdot g_0 = 2000\ kg \cdot 19{,}66\ \frac{N}{kg} = 39320\ N$

ii) Como la fuerza gravitatoria es conservativa, calculamos el trabajo que realiza a partir de la variación de energía potencial gravitatoria. $W_{Fg} = -\Delta E_{pg}$

Datos: M = $2{,}99 \cdot 10^{24}$ kg R = $3{,}185 \cdot 10^6$ m m = 2000 kg

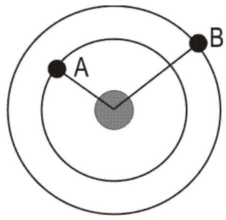
$$W_{Fg} = -\Delta E_{pg} = -\left(E_{pg2} - E_{pg1}\right) = E_{pg1} - E_{pg2} = -\frac{GMm}{R} - \left(-\frac{GMm}{2R}\right) = -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{2R} = -\frac{GMm}{2R}$$

Sustituyendo: $W_{Fg} = -6{,}26 \cdot 10^{10}\ J$

La fuerza gravitatoria realiza un trabajo negativo (ya que F_g se opone a este desplazamiento. Para poder hacer este desplazamiento, debemos realizar en sentido contrario un trabajo al menos igual (en valor absoluto) que el realizado por la fuerza gravitatoria. $W_{necesario} = 6{,}26 \cdot 10^{10}\ J$

3.

a) Dos satélites A y B, con masas idénticas, describen órbitas circulares en torno a un mismo planeta. El radio de la órbita del satélite B es del doble del radio correspondiente al satélite A. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
i) El periodo de revolución del satélite B será el doble del periodo de revolución correspondiente al satélite A.
ii) Ambos satélites poseen la misma energía mecánica, ya que ésta se mantiene constante.



i) Todos los satélites que describan órbitas en torno al mismo astro cumplen la tercera ley de Kepler

$$\frac{T^2}{r^3} = cte \;\rightarrow\; \frac{T_A^2}{r_A^3} = \frac{T_B^2}{r_B^3} \;\rightarrow\; T_B^2 = \frac{r_B^3}{r_A^3} \cdot T_A^2 = \frac{(2 \cdot r_A)^3}{r_A^3} \cdot T_A^2 = \frac{8 \cdot r_A^3}{r_A^3} \cdot T_A^2 = 8 \cdot T_A^2$$

Así $T_B = \sqrt{8} \cdot T_A$

Como vemos, el periodo de B **no** es el doble del A. La afirmación es falsa.

(Puede hacerse un razonamiento similar usando la fórmula del periodo de revolución ($T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$)

ii) La fuerza gravitatoria es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica de un satélite se mantiene constante durante **su** movimiento orbital. Pero cada satélite tiene su propio valor de energía mecánica, que depende, entre otras cosas, de la distancia al centro del planeta (*r*). $E_M = -\frac{GMm}{2r}$

$E_{MA} = -\frac{GMm}{2r_A}$ $\qquad$ $E_{MB} = -\frac{GMm}{2r_B}$

Como ambos radios son distintos, las energías mecánicas también lo son. La afirmación es falsa.

b) Un satélite del sistema de posicionamiento GPS, de 1200 kg, se encuentra en una órbita circular a una altura sobre la superficie igual a 3 R_T. Calcule razonadamente:
i) Velocidad orbital del satélite.
ii) Energía del satélite en la órbita.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $g_{0T} = 9{,}8$ N/kg ; $R_T = 6370$ km

i) La velocidad orbital es la velocidad que es necesario imprimir a un objeto, en dirección perpendicular al radio, para que describa una trayectoria circular en torno al planeta. Viene dada por la expresión

$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ donde M es la masa del planeta, y r el radio de la órbita.

Calculamos la masa de la Tierra a partir de la gravedad superficial

$$g_{0T} = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow \; M_T = \frac{g_{0T} \cdot R_T^2}{G} = 5{,}96 \cdot 10^{24}\ kg$$

El radio de la órbita *r = R + h = 4 RT = 25480 km = 2,548 ·10^7 m*

Sustituyendo $v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 3{,}95 \cdot 10^3\ m\ s^{-1}$ (3,95 km/s)

ii) La energía mecánica del satélite en la órbita viene dada por

$$E_M = Ec + Ep_g = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{GM}{r}} \right)^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

Sustituyendo los datos: $E_M = -\frac{GMm}{2r} = -9{,}36 \cdot 10^9\ J$