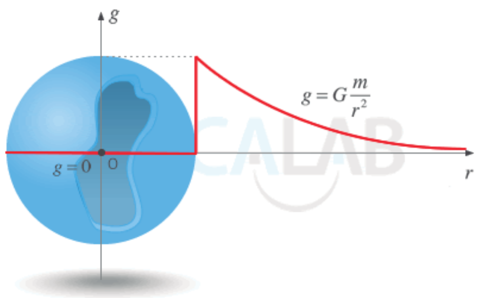
Tema 02
El campo gravitatorio



IES Padre Manjón
Prof: Eduardo Eisman

02. El campo gravitatorio: Índice

CONTENIDOS	
1. Concepto de campo · 2. Campo gravitatorio · 3. Enfoque energético del campo · 4. Representación gráfica del campo · 5. Movimiento de cuerpos en un campo gravitatorio	
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	**ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE**
1. Asociar el campo gravitatorio a la existencia de masa y caracterizarlo por la intensidad del campo y el potencial.	1.1. Diferencia entre los conceptos de fuerza y campo, relación entre intensidad del campo gravitatorio y la aceleración de la gravedad. 1.2. Representa el campo gravitatorio mediante las líneas de campo y las superficies de equipotencial.
2. Reconocer el carácter conservativo del campo gravitatorio por su relación con una fuerza central y asociarle un potencial gravitatorio.	2.1. Carácter conservativo del campo gravitatorio y determina el trabajo realizado por el campo a partir de las variaciones de energía potencial.
3. Interpretar las variaciones de energía potencial y el signo de la misma en función del origen de coordenadas energéticas elegido.	3.1. Calcula la velocidad de escape de un cuerpo aplicando el principio de conservación de la energía mecánica.
4. Justificar las variaciones energéticas de un cuerpo en movimiento en el seno de campos gravitatorios.	4.1. Aplica la ley de conservación de la energía al movimiento orbital de diferentes cuerpos como satélites, planetas y galaxias.
5. Relacionar el movimiento orbital de un cuerpo con el radio de la órbita y la masa generadora del campo.	5.1. Velocidad orbital de un cuerpo, y la relaciona con el radio de la órbita y la masa del cuerpo. 5.2. Hipótesis de la existencia de materia oscura a partir de de rotación de galaxias y la masa del agujero negro central.
6. Conocer la importancia de los satélites de comunicaciones, GPS y meteorológicos y las características de sus órbitas.	6.1. Aplicaciones virtuales para el estudio de satélites de órbita media (MEO), órbita baja (LEO) y de órbita geoestacionaria (GEO).

1.1 Concepto de campo

- **Campo** se define como una región del espacio dónde existe una determinada propiedad escalar o vectorial. Según dicha propiedad, podemos hablar de :

- **Campo escalar:** es aquel en el que la magnitud física que lo define es escalar.
- **La temperatura, la presión atmosférica, la densidad del aire o el potencial gravitatorio o eléctrico, en distintos lugares de la Tierra, son ejemplos de campos escalares.**
- En general los campos escalares son función del tiempo y se representan por la función T (x, y, z, t), son campos no estáticos.

- **Campo vectorial:** cuando la magnitud física que lo define es un vector.
- Entre los campo vectoriales, son especialmente importantes los campos de fuerzas.
- **Son campos vectoriales de fuerzas el campo gravitatorio y el campo eléctrico.**

- Un campo vectorial es de fuerzas cuando en cada punto del mismo actúa una fuerza sobre un partícula sensible (testigo) que coloquemos en él.

- **El valor de la fuerza que el campo ejerce depende de:**

- **Una magnitud vectorial** $\vec{E}$ propia del campo, función de las coordenadas que llamamos, **intensidad de campo.**

- **Una magnitud escalar m/q** que es característica de la **partícula sensible** que se coloque en el campo.

1.2 Concepto de campo

- Un campo de fuerzas como el gravitatorio se pone de manifiesto por la fuerza que el campo ejerce sobre una partícula de masa m que se coloque en él. Se cumple:

$$\vec{F} = m.\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}$$

- Siendo $\vec{E}$ **la Intensidad de Campo** o fuerza que el campo ejerce sobre la unidad de masa que se coloque en un punto de él.

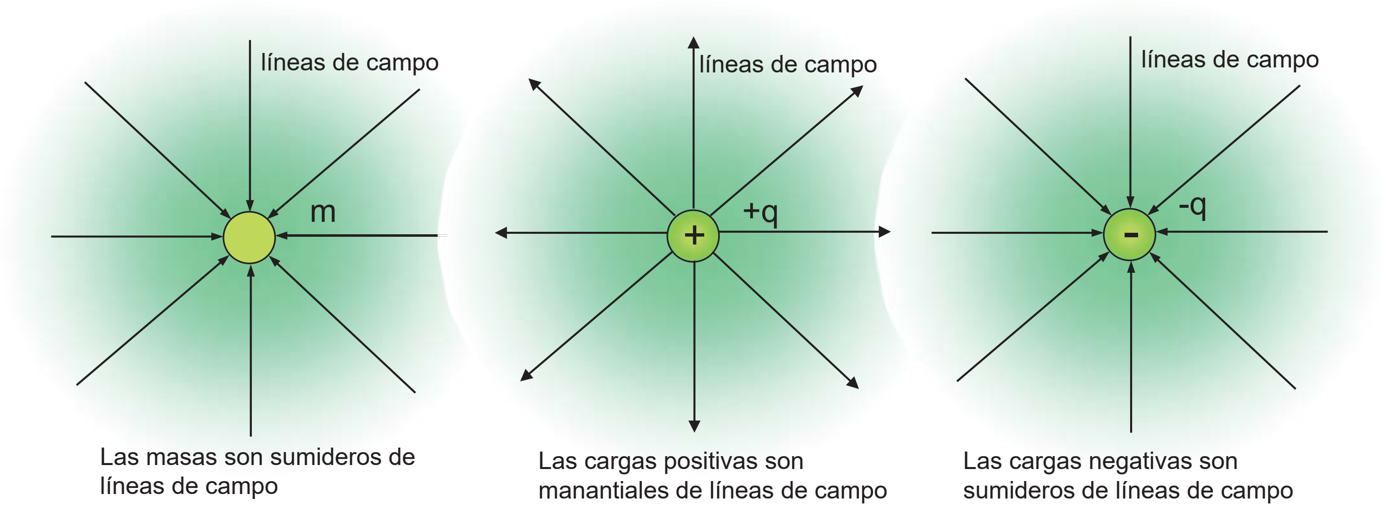
- Posee la misma dirección y sentido que la fuerza y se mide en N/kg.

- Análogamente se define la **Intensidad de Campo Eléctrico**, sin más que hablar de cargas en vez de masas, como la fuerza que el campo ejerce sobre la unidad de carga positiva.

- **Los campo gravitatorio y eléctrico son campos de fuerzas centrales:** la dirección de la fuerza en cada uno de sus puntos pasa siempre por un punto fijo, llamado centro de fuerzas.
- **Presentan simetría esférica.**
- **Estas fuerzas son conservativas** y cumplen el principio de conservación de la energía mecánica.

1.3 Líneas de campo

- **Un campo de fuerzas se representa gráficamente mediante líneas de campo o de fuerza.**
- Son en todo punto tangentes al campo y corresponden al camino que sigue una partícula sensible dejada libremente en el campo.
- La partícula sensible será la unidad de masa en el campo gravitatorio y la unidad de carga positiva en el campo eléctrico.
- Si el campo es más intenso se dibujan un mayor número de líneas de campo.

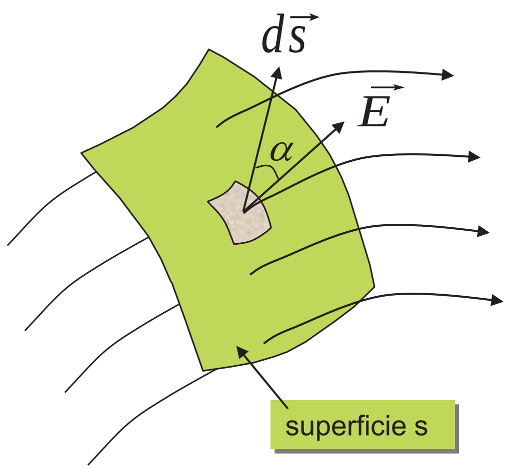


- Son **campos radiales** porque la fuerza está dirigida en la dirección del radio vector que une los centros de las cargas o de las masas; este tipo de campos se llaman también campos de fuerzas centrales.

1.4 Flujo del vector intensidad de campo a través de una superficie

- **El flujo y la circulación son dos propiedades matemáticas de los campos** que nos sirven para poder describirlos.
- Sea una superficie cualquiera situada en un campo vectorial. Dicha superficie está atravesada por líneas de campo.
- Se define el flujo elemental del vector intensidad de campo a través de la superficie de área ds mediante la expresión:

$$d\phi = \vec{E}.d\vec{s} = E.ds\cos\alpha$$



- **El flujo elemental que atraviesa la superficie elemental de la figura es el producto escalar del vector intensidad de campo y vector superficie.**
- El flujo total se calcula integrando a toda la superficie:

$$\phi_{TOTAL} = \int_s \vec{E}.d\vec{s}$$

- **La integral es el flujo total del vector intensidad de campo a través de la superficie.**

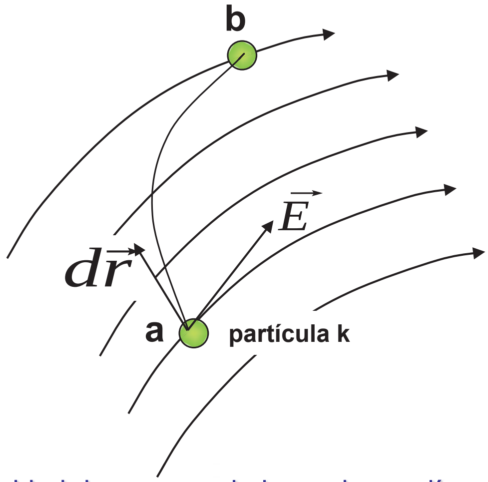
1.5 Circulación del vector intensidad de campo a lo largo de la curva ab

- Sea un campo vectorial de fuerzas representado por sus líneas de fuerza o de campo.
- Cuando una partícula (de masa o carga) k, se traslada por las fuerzas del campo, desde un punto a hasta otro punto b, dicho campo realiza un trabajo que viene dado por la expresión:

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}.d\vec{r} = \int_a^b k\vec{E}.d\vec{r} = k\int_a^b \vec{E}.d\vec{r}$$

- Llamamos circulación del vector intensidad de campo a lo largo de la curva ab a la siguiente expresión:

$$\boxed{C = \int_a^b \vec{E}.d\vec{r}}$$



- A lo largo de una línea cerrada la circulación vale:

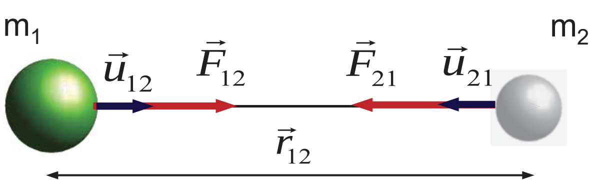
$$C = \oint \vec{E}.d\vec{r} = \int_a^b \vec{E}.d\vec{r} + \int_b^a \vec{E}.d\vec{r}$$

- En un campo conservativo la circulación del vector intensidad de campo a lo largo de una línea cerrada es cero.

2.1 La ley de gravitación universal

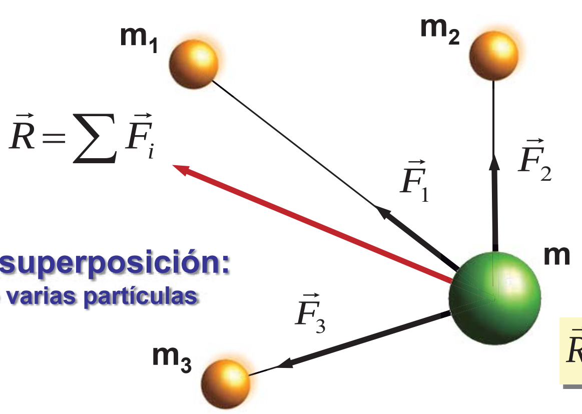
- **Issac Newton:** 1642-1727. Matemático, físico y astrónomo británico.
- Padre de la física clásica, por sus tres principios. Desde 1667 profesor en Cambridge.

- **Teoría de la Gravitación Universal:**
- La interacción gravitatoria entre dos cuerpos es atractiva; una fuerza central directamente proporcional a las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa (desde sus centros).



$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m_1.m_2}{r^2}.\vec{u}_r}$$

- Siendo G = $6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2/kg^2$
- Una constante universal
- Determinada experimentalmente por Cavendish.



- **Principio de superposición:**
  Interacción entre varias partículas

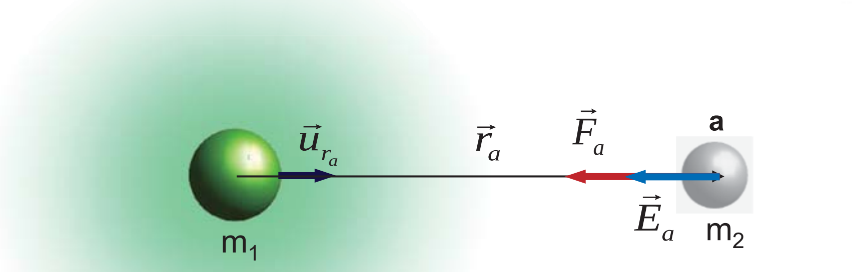
- La fuerza que ejerce un conjunto de masas sobre otra es igual a la suma de las fuerzas que ejercen cada una sobre ella, consideradas individualmente.

$$\boxed{\vec{R}_m = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 ... = \sum \vec{F}_i = \vec{R}}$$

2.2 Intensidad de campo gravitatorio: campo creado por una masa puntual

- **Intensidad de campo gravitatorio.** Se define la intensidad en un punto de un campo gravitatorio como la fuerza que actúa en ese punto sobre la unidad de masa (1kg) que se coloque en él.

- Consideramos la masa m_1 la que crea el campo gravitatorio, y en el punto "a" determinado por su vector de posición $\vec{r}_a$, calculamos la **Intensidad de Campo Gravitatorio**:



$$\vec{E}_a = \frac{\vec{F}_a}{m_2} = -G\frac{m_1}{r_a^2}.\vec{u}_{r_a}$$

- la masa m_1 es la que crea el campo gravitatorio
- m_2 se encuentra en el campo gravitatorio creado por m_1
- Vector Intensidad de campo en a

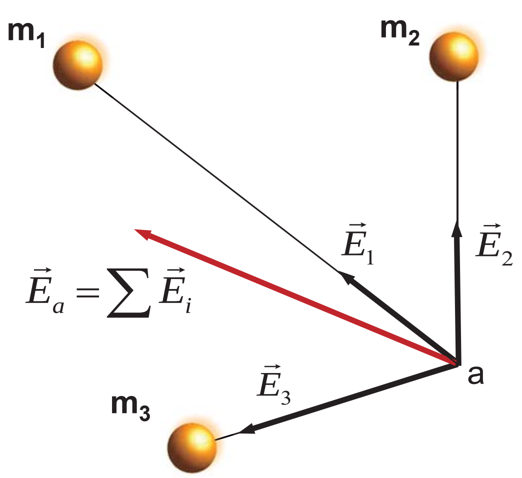
- El valor de $\vec{E}_a$ depende de la masa m_1 que crea el campo y del punto $\vec{r}_a$.

- El campo gravitatorio se puede representar mediante líneas de fuerza o de campo que son siempre tangentes en cada punto al vector intensidad de campo. El número de líneas de fuerza nos dará idea del valor de la intensidad de campo.

2.3 Intensidad de campo gravitatorio: Principio de superposición

- **La intensidad de campo gravitatorio creado por varias masas puntuales en un punto es la suma vectorial de los campos que crean en ese punto cada una de esas masas.**

- Campo creado por varias masas, **m_1, m_2 y m_3, en un punto a :**



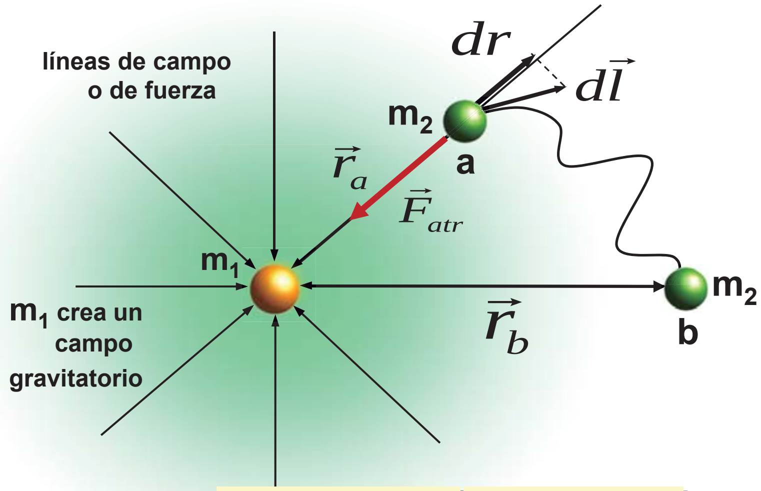
$$\vec{E}_{total\ en\ a} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \sum \vec{E}_i$$

3.1 Trabajo en el campo gravitatorio

- **Vamos a calcular el trabajo realizado por las fuerzas (conservativas) del campo para llevar la partícula de masa m_2 desde el punto a hasta el punto b.**

- Cualquier desplazamiento elemental $d\vec{l}$ a lo largo del camino seguido, al multiplicarlo escalarmente por el vector unitario $\vec{u}_r$, que nos indica la dirección del vector fuerza, da lugar a que sólo contribuya a la expresión del trabajo, el desplazamiento radial dr :

$$\vec{u}_r \cdot d\vec{l} = 1 . dl . \cos\alpha = dr$$



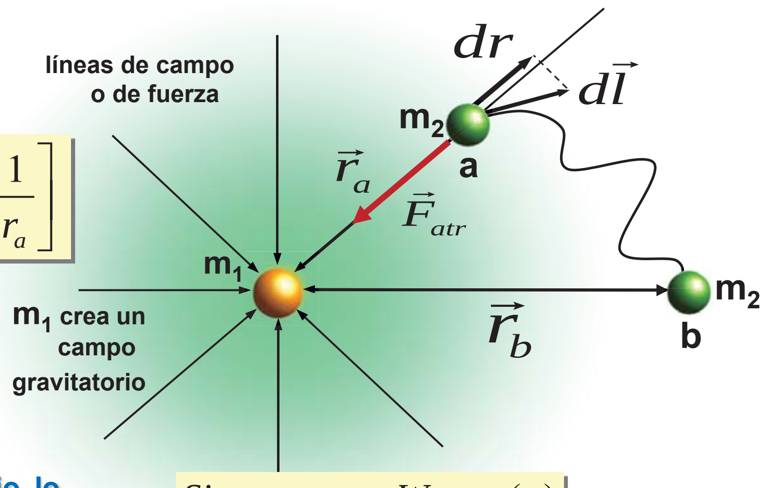
$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} . d\vec{l} = \int_a^b -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r . d\vec{l} = \int_a^b -G\frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -Gm_1 m_2\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = Gm_1 m_2\left[\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right]$$

- El trabajo realizado por el campo depende sólo de los **puntos inicial a y final b, no del camino recorrido,** por lo tanto **el campo gravitatorio es conservativo y la fuerza que ejerce el campo es conservativa.**

3.2 Trabajo en el campo gravitatorio

- **Trabajo realizado por las fuerzas (conservativas) del campo para llevar la partícula de masa m_2 desde el punto a hasta el punto b.**

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} . d\vec{l} = Gm_1 m_2\left[\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right]$$



- **Las masas se acercan, el trabajo lo realiza la fuerza gravitatoria (campo):** $Si\ r_b < r_a \Rightarrow W_{ab}\ es\ (+)$

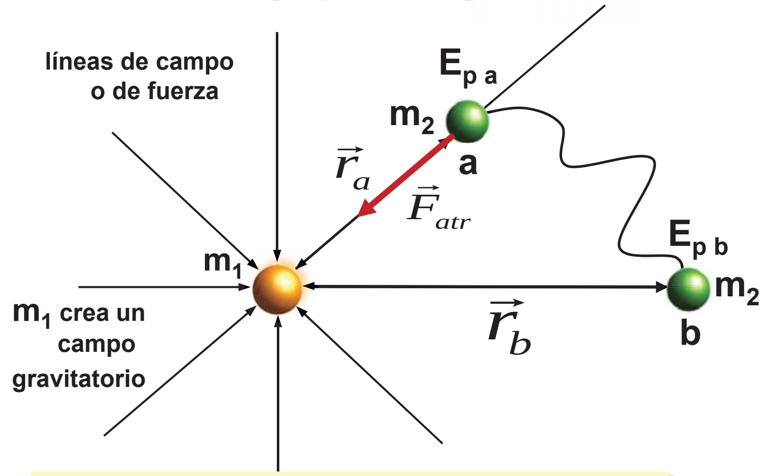
- **Las masas se separan, el trabajo lo realiza un agente exterior al campo (nosotros):** $Si\ r_b > r_a \Rightarrow W_{ab}\ es\ (-)$

- Que el trabajo realizado por el campo dependa sólo de los puntos inicial a y final b, no del camino recorrido, nos permite decir que el **campo gravitatorio es conservativo** y consecuentemente la fuerza que ejerce el campo es conservativa.

4.1 Trabajo y energía potencial gravitatoria

- **Energía potencial:** en los campo conservativos, como el campo gravitatorio, se puede definir una función escalar que sólo depende de cada uno de sus puntos, a esa función de las coordenadas le llamamos energía potencial gravitatoria.

- El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria del campo representa una disminución de energía potencial.
- Asignamos a cada punto del campo un valor de energía potencial, tomando el punto que nos interese como origen de energías.
- Al punto b, supuesto en el infinito, le asignamos valor cero de Energía Potencial.



$$Si\ r_b \to \infty \Rightarrow \frac{1}{r_b} \to 0\ :\ E_{pb} = 0$$

$$W_{ab} = -\Delta E_p = E_{p_a} - E_{p_b} = G m_1 m_2 \left[\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right]$$

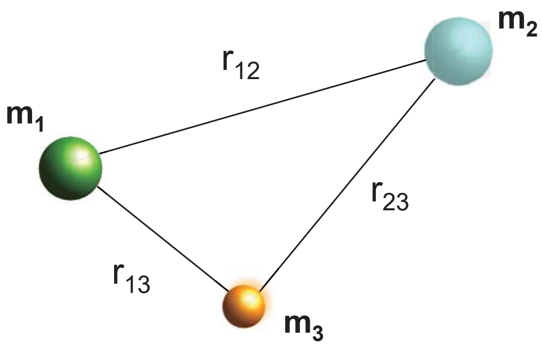
$$E_{p_a} = -G \frac{m_1 m_2}{r_a}$$

- **Energía Potencial en a**

- El signo menos (-) representa el trabajo que "nosotros" hemos de hacer para llevar la masa m_2 desde el punto a hasta el punto b.
- La energía potencial en "a" depende: del punto del campo, y de ambas masas m_1 y m_2.

4.2 Energía potencial gravitatoria de un sistema de partículas

- **La energía potencial gravitatoria**, de un sistema de tres o más partículas es la suma de la energía de todas las parejas de partículas que constituyen el sistema:



- **Siempre es negativa**

$$E_{p\ sistema} = -G \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right] = -G \sum_{pares} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

- **Energía Potencial Gravitatoria de un Sistema de Partículas**

5.1 Potencial gravitatorio

- **El Potencial Gravitatorio** se define como el trabajo o la energía potencial por unidad de masa. Es una magnitud escalar, por lo que describe de manera más sencilla el campo.

- La diferencia de potencial (V_a - V_b) entre dos puntos de un campo gravitatorio, es el trabajo que realiza el campo para llevar la unidad de masa desde el punto a hasta el punto b:

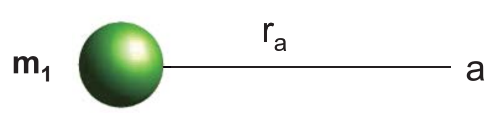
$$-\Delta V = V_a - V_b = \frac{W_{ab}}{m_2} = G\,m_1\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

- Se mide en J/kg en el S.I

- El punto b, supuesto en el infinito, toma el valor cero de Potencial:

$$Si\ r_b \to \infty \Rightarrow \frac{1}{r_b} \to 0\ :\ V_b = 0$$

- Por tanto el Potencial en cualquier otro punto a vale:

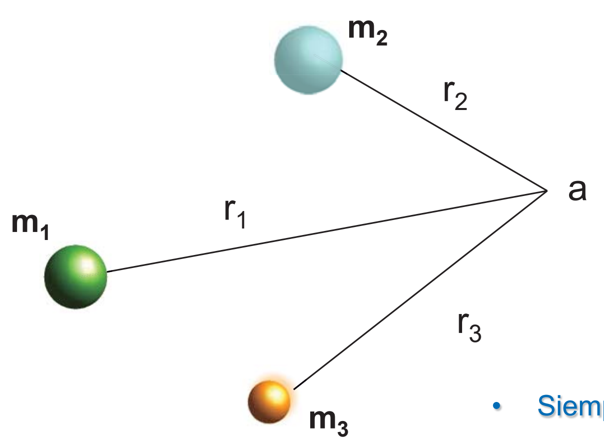


$$V_a = -G\frac{m_1}{r_a}$$

- Siempre es negativo

5.2 Potencial gravitatorio

- **El potencial gravitatorio** de un sistema de varias partículas, en un punto, es la suma escalar de los potenciales de cada una de las partículas que constituyen el sistema:



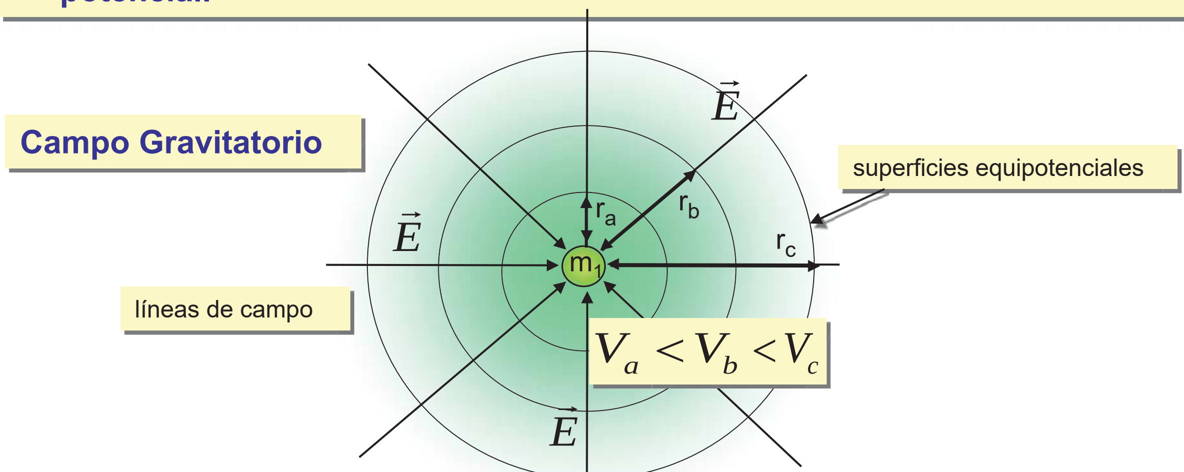
- Siempre es negativo

- El potencial creado por un Sistema de Partículas:

$$V_{a\ part} = -G\left[\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3}\right] = -G\sum_{part}\frac{m_i}{r_i}$$

6.1 Superficies equipotenciales

- Si un campo de fuerzas es conservativo, además de representarlo por líneas de fuerza, también se representa por superficies equipotenciales.
- Por lo tanto, el **campo gravitatorio se puede representar mediante superficies equipotenciales: lugar geométrico de los puntos que tienen el mismo potencial.**



- Las superficies equipotenciales son esferas concéntricas, cuyo centro está en la masa m_1 que crea el potencial (el campo).
- **Las superficies equipotenciales son siempre perpendiculares a las líneas de campo.**
- A lo largo de una superficie equipotencial el trabajo que se realiza es nulo.
- **El vector intensidad de campo gravitatorio/eléctrico se dirige siempre hacia potenciales decrecientes.**

7.1 Relación entre intensidad de campo y potencial

- **Una masa, crea un campo, que podrá definirse mediante una:**
  - **una magnitud vectorial: INTENSIDAD DE CAMPO**
  - **una magnitud escalar: POTENCIAL**
- Si derivamos la expresión del potencial respecto de r:

$$V = -G\frac{m}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dr} = G\frac{m}{r^2} = -\vec{E} \qquad dV = -\vec{E}.d\vec{r}$$

- El signo menos indica que el vector intensidad de campo siempre se dirige hacia potenciales decrecientes.
- Si el vector desplazamiento dr y el vector E son del mismo sentido, el trabajo es positivo (+W), nos movemos hacia potenciales decrecientes.

- **En general el potencial V es función de tres coordenadas: V (r) = V (x,y,z); a partir de él podemos calcular las componentes cartesianas del campo:**

- **El vector intensidad de campo es:**

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)V = -grad\,V = -\nabla V$$

- **Estas expresiones son las derivadas parciales de V respecto de x, y, z.**

- **Ej: si la función potencial es V = 4X²·Y + y + Z³; el vector intensidad de campo es:**

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(4x^2y + y + z^3\right)$$
$$= -8xy\,\vec{i} - \left(4x^2 + 1\right)\vec{j} - 3z^2\,\vec{k}$$

8.1 Campo gravitatorio terrestre

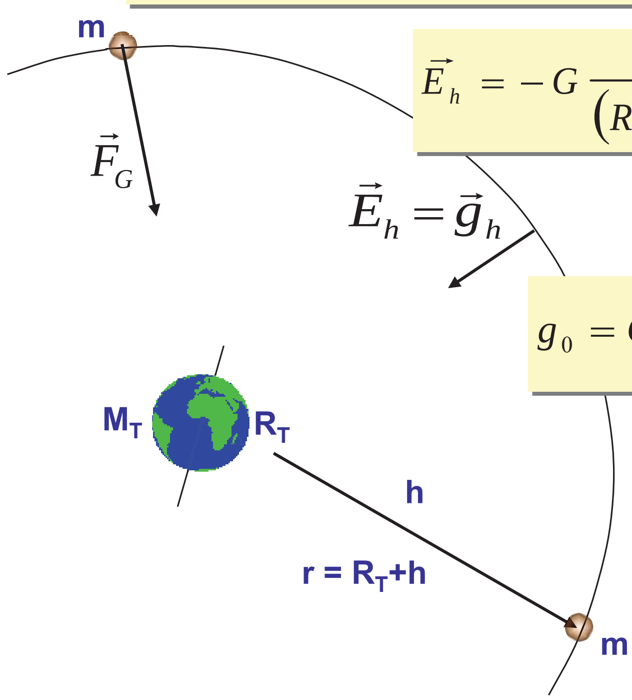
- La fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo de masa m situado a una distancia r de su centro, es el PESO de ese cuerpo:

$$\vec{F}_G = -G\frac{M_T m}{r^2}\vec{u}_r = -G\frac{M_T\, m}{(R_T+h)^2}\vec{u}_r = m\,\vec{g}_h = Peso$$

- Se deduce, que **la intensidad en un punto de un campo gravitatorio terrestre….**

$$\vec{E}_h = -G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\vec{u}_r = \vec{g}_h$$

- **….es igual a la aceleración de la gravedad en ese punto del campo.**



- **Cálculo de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra (g_o) y a una altura h (g_h) :**

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

$$g_h = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} = g_0\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$$

- **Siendo:** $g_o R_T^2 = GM_T$

$$E_{p_h} = -G\frac{M_T m}{R_T+h} \qquad V_h = -G\frac{M_T}{R_T+h}$$

- **Los valores de la Energía Potencial y Potencial, en campo gravitatorio terrestre, son siempre negativos.**

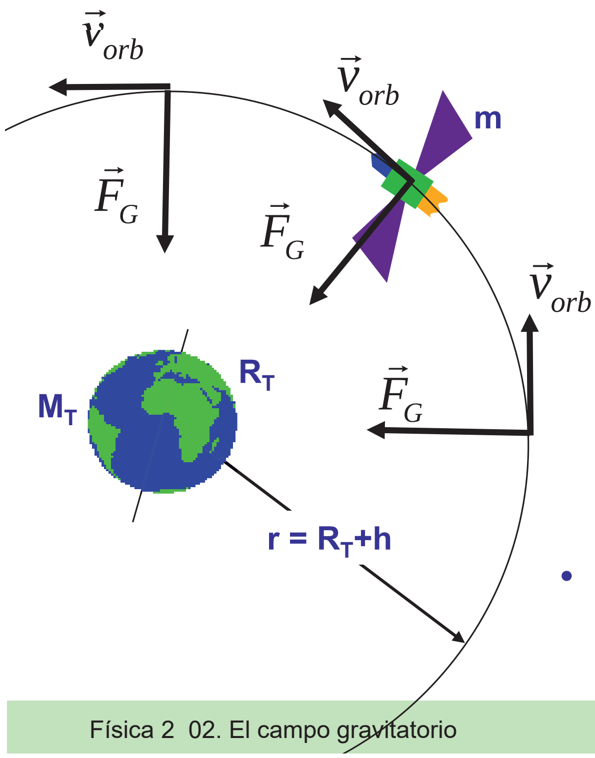
8.2 Campo gravitatorio terrestre: satélites artificiales

- **La fuerza gravitatoria terrestre es la responsable de que el satélite esté ligado a la Tierra:**

$$F_G = G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r} = mw^2 r = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

- **A partir de la fuerza gravitatoria se calcula la velocidad orbital del satélite en su órbita y el periodo T:**

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} \qquad T = \frac{2\pi r}{v_{orb}}$$



- **La Energía Mecánica de un satélite en su órbita será la suma de su Energía Cinética más su Energía Potencial:**

$$E_{MEC} = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv_{orb}^2 - G\frac{M_T m}{r}$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{r} - G\frac{M_T m}{r} = -\frac{GM_T m}{2r}$$

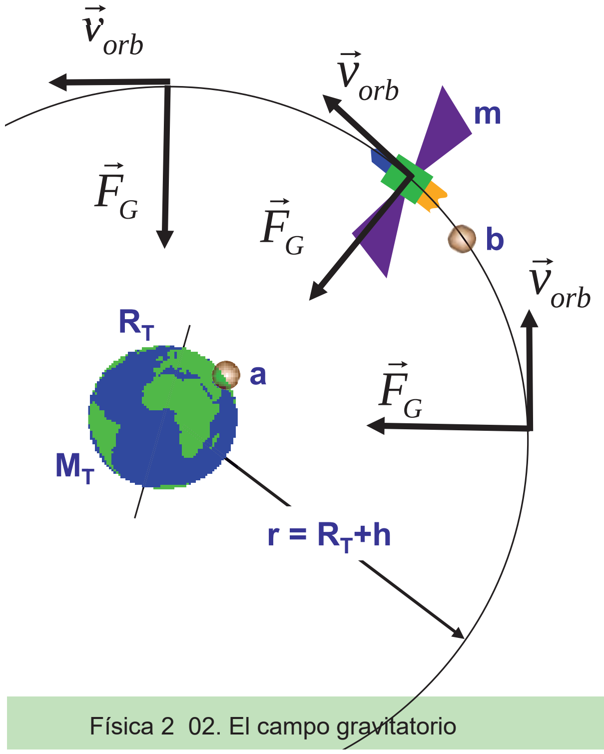
- **La Energía Mecánica de un satélite siempre es negativa, significa que el satélite está atrapado en su órbita, y para sacarlo de ella hay que suministrarle esa energía.**

8.3 Campo gravitatorio terrestre: P. conservación energía mecánica

- **Entre dos puntos cualesquiera, supuesto uno en la superficie de la Tierra (a) y otro a una cierta altura h (b), se cumple el PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA:**

$$E_{Mec\,a} = E_{Mec\,b}$$

$$\frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{GM_T m}{(R_T + h)}$$



- **Podemos calcular la velocidad comunicada en "a" al satélite para ponerlo en esa órbita.**

Velocidad de escape de un satélite (V_e)

- **Velocidad con la que debe lanzarse un cuerpo desde la superficie de la Tierra, para vencer la atracción terrestre y no volver a la Tierra.**
- **Hay que comunicarle una energía cinética equivalente al trabajo para desplazar el satélite desde la superficie de la Tierra hasta el infinito:**

$$E_{C_a} = W_{R_T \to \infty} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GM_T\, m}{R_T} = 0 \Rightarrow$$

$$v_{escape\ Tierra} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_0 R_T} = 11{,}2\ \frac{km}{s}$$

8.4 Movimiento de cuerpos en el campo gravitatorio

- **Satélites de órbita terrestre**

Órbita terrestre baja (LEO)	Órbita terrestre media (MEO)	Órbita geoestacionaria (GEO)
• El radio de la órbita está entre 600 y 1200 km. • El plano de la órbita tiene una orientación fija respecto del Sol (heliosíncronas). • Usos: - Localización de personas. - Observación de la Tierra. - Estudio de cosechas. - Análisis de la masa forestal. - Telefonía móvil. - Transmisión de datos.	• El radio de la órbita está entre 10000 y 20000 km. • Usos: - Telefonía móvil. - Televisión. - Medida de elementos espaciales. - Localización de personas, vehículos con fines civiles y militares (GPS, a 20200 km)	• Se encuentra siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre, a una altura sobre la superficie de unos 35900 km. • El periodo de la órbita coincide con el de rotación de la Tierra (24 h). • Usos: - Meteorología. - Comunicaciones

9. Ejercicios de campo gravitatorio

5. Un objeto de $m_1 = 10^{20}$ kg se considera fijo; a 2000 km hay otro $m_2 = 10^5$ kg. Calcular: a) la fuerza que actúa sobre esta última; b) el módulo de la intensidad de campo en el sitio ocupado por m_2 ; c) el trabajo que se realiza para alejar m_2 10 km de m_1 .

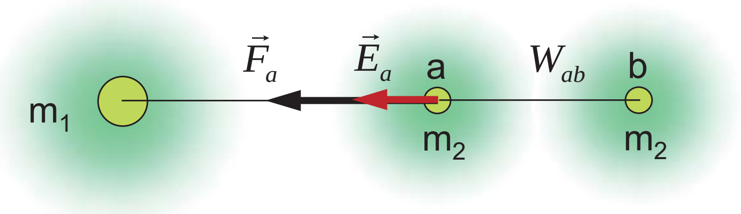
- Sol: -166,75 N ; $-1{,}66.10^{-3}$ N/kg ; $-1{,}65.10^6$ J.

- a) La fuerza gravitatoria entre ambas masas se calcula a partir de la ley de Newton:

$$\vec{F}_{grav} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r = -6,67.10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2}.\frac{10^{20}kg.10^5 kg}{(2.10^6 m)^2}\vec{u}_r = -166,75\vec{u}_r\ N$$

- b) La intensidad de campo en a:

$$\vec{E}_{grav} = \frac{\vec{F}_{grav}}{m_2} = \frac{-166,75\vec{u}_r\ N}{10^5\ kg} = -1,66.10^{-3}\ N.kg^{-1}$$



- c) El trabajo realizado para alejar la masa 2 una distancia de 10 km:

$$W_{ab} = Gm_1m_2\left[\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right] = 6,67.10^{-11}.10^{20}.10^5\left[\frac{1}{2010.10^3}-\frac{1}{2000.10^3}\right] = -1,65.10^6\ J$$

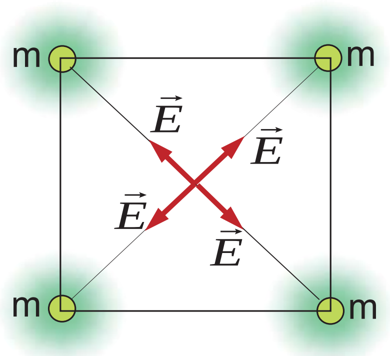
- El trabajo negativo significa que lo realiza un agente externo al campo.

9. Ejercicios de campo gravitatorio

6. En los vértices de un cuadrado de 1 m de lado se sitúan masas iguales de 1 kg. Determinar el campo y el potencial en el centro. G=6,67.10-11 N.m2 /kg2 .

- Sol: 0 N/kg , $-3{,}77.10^{-10}$ J/kg .

- Por simetría, el campo gravitatorio en el centro del cuadrado se anula por pares, es nulo:



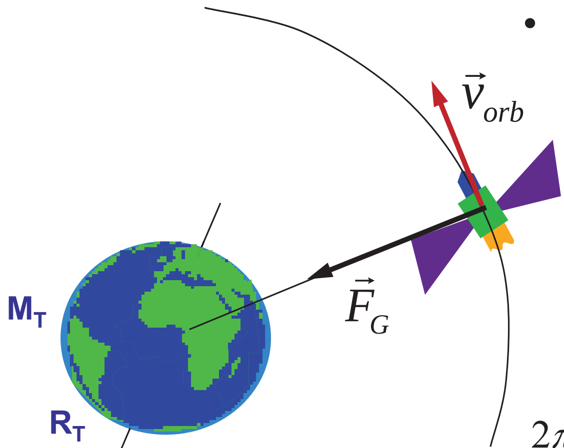
$$\vec{E}_{total\ en\ el\ centro} = 0$$

- El potencial gravitatorio en el centro del cuadrado es la suma escalar de cada uno de los potenciales que crean las cuatro masas. Por tanto vale:

$$V_{grav.o} = -4G\frac{m}{r} = -4.6,67.10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2}\frac{1\,kg}{\sqrt{2}/2\,m} = -3,77.10^{-10}\ J.kg^{-1}$$

9. Ejercicios de campo gravitatorio

18. Un satélite artificial de 100 kg de masa gira alrededor de la Tierra a 200 km de altura. Calcular: a) la velocidad de giro y el período de revolución; b) su energía cinética, potencial y mecánica.
$G=6,67.10^{-11}$ N.m^2 /kg^2 .M_T = 5,98.10^{24}/kg. R_T = 6370 km. Sol: 7791 m/s, 1,47 h, -3,04.10^9 J.



- La fuerza gravitatoria terrestre mantiene ligado el satélite a la Tierra: fuerza normal, radial o centrípeta, de módulo:

$$F_{grav} = G\frac{M_T m_{sat}}{(R_T+h)^2} = \frac{m_{sat} v_{orb}^2}{R_T+h}$$

- despejamos la velocidad orbital

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}}{6370.10^3+200.10^3}} = 7792\,m.s^{-1}$$

- calculamos el período de revolución:

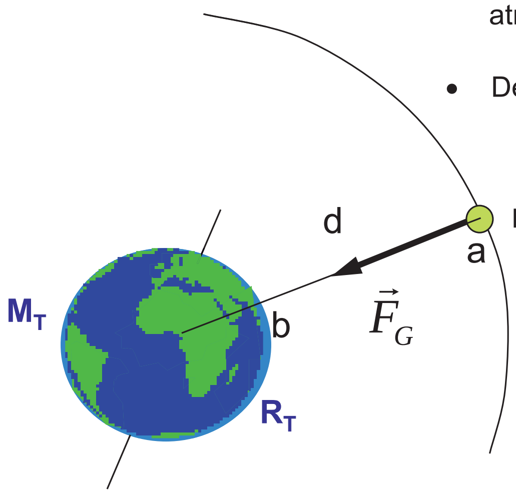
$$v_{orb} = w_{ang} r_{orb} = \frac{2\pi}{T} r_{orb} \Rightarrow T = \frac{2\pi(R_T+h)}{v_{orb}} = \frac{2\pi.6570.10^3\,m}{7792\,m.s^{-1}} = 5298s = 1,47h$$

- **Las órbitas son, supuestamente, circulares y el movimiento uniforme.**
- **Energía mecánica del satélite en su órbita:**

$$E_{mec} = E_c + E_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{GM_T m}{R_T+h} = -\frac{GM_T m}{2(R_T+h)} = 3,03.10^9\,J - 6,07.10^9\,J = -3,04.10^9\,J$$

9. Ejercicios de campo gravitatorio

22. ¿A que distancia del centro de la Tierra un objeto de 1 kg de masa pesa 1N?. Si desde esa altura se le deja caer sin velocidad inicial, calcular: a) la aceleración inicial; b) la velocidad del objeto al llegar a la superficie de la Tierra.
Datos: G., M_T. y R_T . Sol: 19955 km; 1 m/s^2; 9284m/s.



- El peso se debe a la atracción gravitatoria: $P = F_G = G\frac{M_T m}{d^2} = mg = 1N$
- Despejamos la distancia:

$$d = \sqrt{GM_T m} = \sqrt{6,67.10^{-11}.5,97.10^{24}.1} = 19955\,km$$

- aceleración con la que la masa cae: $F = ma \Rightarrow a = \frac{1N}{1kg} = 1m.s^{-2}$
- También se puede calcular a partir de la intensidad de campo gravitatorio en ese punto:

$$a = g_d = E_d = G\frac{M_T}{d^2} = 1m.s^{-2}$$

- **Aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica entre los puntos a y b:**

$$E_{pa} = E_{cb} + E_{pb} \Rightarrow -G\frac{M_T m}{R_T+h} = \frac{mv_b^2}{2} - G\frac{M_T m}{R_T} \Rightarrow v_b = 9284\,m.s^{-1}$$

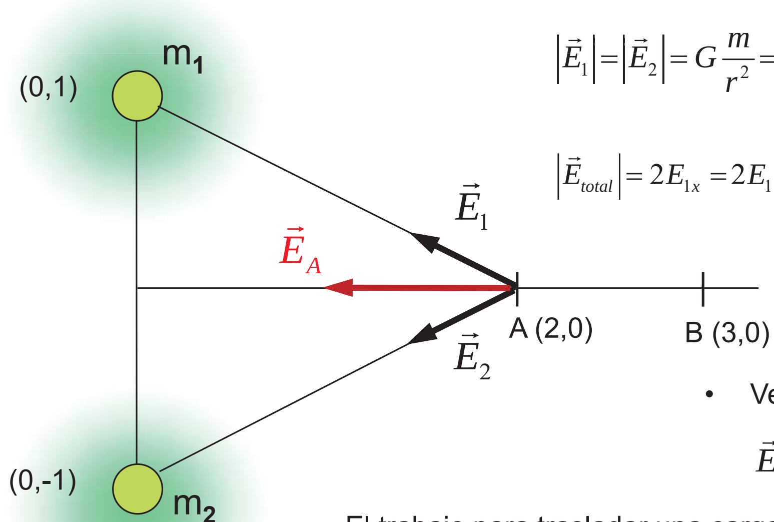
9. Ejercicios de campo gravitatorio

24. Dos masas puntuales de 10 kg cada una están situadas en los puntos (0,1) y (0,-1) respectivamente. Calcular: a) el campo gravitatorio en el punto A (2,0); b) el trabajo necesario para trasladar una masa de 3 kg desde el punto A hasta el B (3,0), indicando quien realiza dicho trabajo.

- **El campo gravitatorio en el punto A** es la suma vectorial de los campo que originan en dicho punto cada una de las masas. Los módulos de esos campos valen:

$$\left|\vec{E}_1\right|=\left|\vec{E}_2\right|=G\frac{m}{r^2}=6,67.10^{-11}\frac{10}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=2,98.10^{-10}\,N.kg^{-1}$$

$$\left|\vec{E}_{total}\right|=2E_{1x}=2E_1\cos\alpha=2,98.10^{-10}\frac{1}{\sqrt{5}}=1,33.10^{-10}\,N.kg^{-1}$$



- Vector campo gravitatorio en el punto A:

$$\vec{E}_A=-1,33.10^{-10}\,\vec{i}\;\;N.kg^{-1}$$

- El trabajo para trasladar una carga desde el punto A hasta el punto B:

$$W_{A\rightarrow B}=m(V_A-V_B)=\;mG\left[\frac{m_1}{r_b}-\frac{m_2}{r_b}\right]-mG\left[\frac{m_1}{r_a}-\frac{m_2}{r_a}\right]=-5,22.10^{-11}\,J$$

- **El trabajo para trasladar la masa desde A hasta B, lo hace un agente externo al campo.**

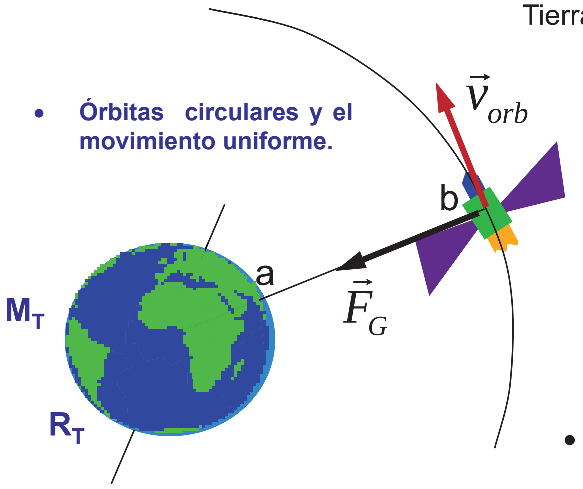
9. Ejercicios de campo gravitatorio

26. Se pone en órbita un satélite a una distancia del centro de la Tierra igual a las 5/4 partes del radio terrestre. Calcular: a) velocidad que hay que comunicarle. b) su período. c) el valor de la aceleración de la gravedad en el interior?

Datos: g_0 = 9,81 m/s2 y R_T = 6400 km. Sol: 8734,3 m/s , 7024,8 s , 0 m/s^2 .

- La fuerza gravitatoria terrestre mantiene ligado el satélite a la Tierra, es una fuerza normal, radial o centrípeta, de módulo:

- **Órbitas circulares y el movimiento uniforme.**



$$F_{grav}=G\frac{M_T m_{sat}}{(\frac{5}{4}R_T)^2}=\frac{m_{sat}v_b^2}{\frac{5}{4}R_T}$$

- despejamos la velocidad orbital

$$v_b^2=\frac{g_0R_T^2}{\frac{5}{4}R_T}\Rightarrow v_b=7155,4\,m.s^{-1}\qquad GM_T=g_0R_T^{\;2}$$

- hemos sustituido

- ahora podemos calcular el período de revolución:

$$v_{orb}=w_{ang}r_{orb}=\frac{2\pi}{T}r_{orb}\Rightarrow\;T=\frac{2\pi.5R_T}{4v_{orb}}=7024,8s=1,95h$$

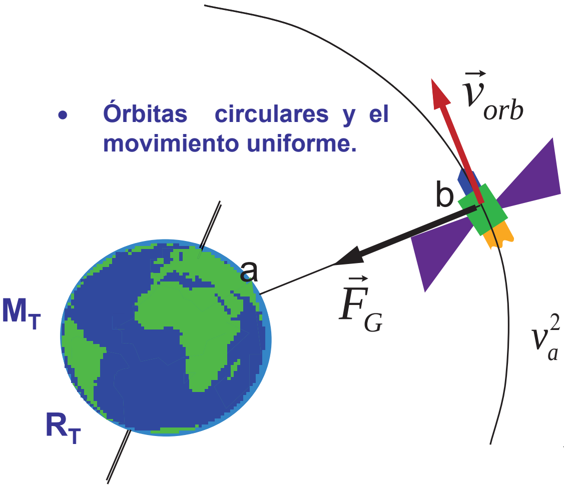
- **Aplicamos el Principio de Conservación de la Energía Mecánica entre los puntos a y b:** $\Longrightarrow$

9. Ejercicios de campo gravitatorio

Continuación…..26. Se pone en órbita un satélite a una distancia del centro de 5/4 parte

- **Aplicamos el Principio de Conservación de la Energía Mecánica entre los puntos a y b:**

- **Órbitas circulares y el movimiento uniforme.**



$$E_{mec_a} = E_{mec_b} \Rightarrow E_{c_a} + E_{p_a} = E_{c_b} + E_{p_b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mv_a^2}{2} - G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{mv_b^2}{2} - G\frac{M_T m}{d_{R_T+h}}$$

- sustituimos la distancia, y despejamos la velocidad del satélite para lanzarlo desde a:

$$v_a^2 = v_b^2 + \frac{10GM_T}{5R_T} - \frac{8GM_T}{5R_T} = v_b^2 + \frac{2GM_T}{5R_T} = v_b^2 + \frac{2g_0R_t^2}{5R_T}$$

$$v_a^2 = v_b^2 + \frac{2g_0R_t^2}{5R_T} = 7155,4^2 + \frac{2.9,8.6400.10^3}{5} = 8734,3\,m.s^{-1}$$

- Aceleración gravitatoria y centrípeta en cualquier punto de la órbita vale:

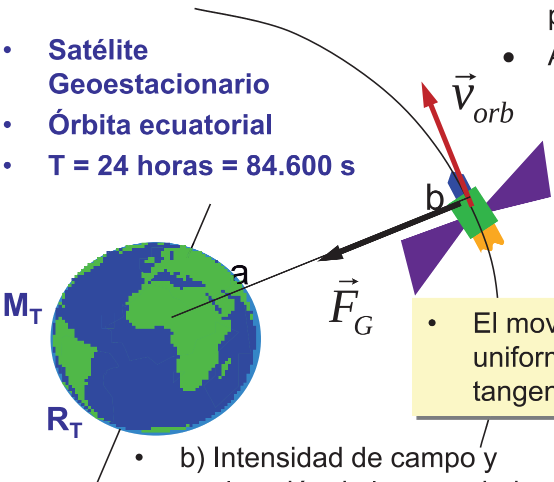
$$g_b = G\frac{M_T}{\left(5/4\,R_T\right)^2} = G\frac{g_0R_T^2}{\left(5/4\,R_T\right)^2} = 6,4\,m.s^{-2} \Leftrightarrow a_c = \frac{v_b^2}{5/4\,R_T} = 6,4\,m.s^{-2}$$

- El satélite está cayendo con una aceleración centrípeta igual a la aceleración de la gravedad; en el **interior del mismo la aceleración es 0, es decir, existe un estado de "INGRAVIDEZ".**

9. Ejercicios de campo gravitatorio

29. Un satélite de comunicaciones de 500 kg de masa está en órbita geoestacionaria circular en torno al Ecuador terrestre. Calcula: a)radio de la trayectoria, aceleración tangencial del satélite y trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando el satélite ha dado media vuelta en torno a la Tierra. b) intensidad de campo gravitatorio y la aceleración de la gravedad en cualquier punto de la órbita. G=6,67.10^{-11} N.m^2 .kg^{-2} .M$_T$ = 5,98.10^{24} kg. Sol: 42250 km , 0 m/s^2 , 0 J , 0,22 m/s^2 .

- **Satélite Geoestacionario**
- **Órbita ecuatorial**
- **T = 24 horas = 84.600 s**



- Un satélite en órbita geoestacionaria gira con el mismo período que lo hace la Tierra: T = 24 h = 86.400 s.
- A partir de la fuerza gravitacional:

$$F_{grav} = G\frac{M_T m_{sat}}{r^2} = \frac{m_{sat}v_{orb}^2}{r} = mw_{ang}^2 r = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \Rightarrow$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = 42.250\ km \approx 6,6\,R_T$$

- El movimiento es circular uniforme, la aceleración tangencial es cero
- El trabajo de la fuerza gravitatoria es cero porque les perpendicular al desplazamiento.

- b) Intensidad de campo y aceleración de la gravedad:

$$\vec{E}_{grav} = \vec{g} = G\frac{M_T}{r^2}\vec{u}_r = 0,224\vec{u}_r\ m.s^{-2}$$

- El satélite está cayendo con una aceleración centrípeta:

$$a_c = \frac{v_{orb}^2}{r} = w^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 0,22\,m.s^{-2}$$

- El satélite está cayendo con una aceleración centrípeta igual a la aceleración de la gravedad; en el **interior del mismo la aceleración es 0, es decir, existe un estado de "INGRAVIDEZ".**

10. Cuestiones de campo gravitatorio.

1. Comentar las siguientes frases: a) La energía mecánica de una partícula permanece constante si todas las fuerzas que actúan sobre ella son conservativas. b) Si la energía mecánica de una partícula no permanece constante, es porque una fuerza disipativa realiza trabajo.

2.a) Explicar el concepto de velocidad de escape y deducir razonadamente su expresión. b) ¿Qué ocurriría en la realidad si lanzamos un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la velocidad de escape?.

4. Se suele decir que la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa m situado a una altura h viene dado por la expresión Ep = mgh. a) ¿Es correcta esta afirmación? ¿Por qué?. b) ¿En qué condiciones es válida dicha fórmula?

6. Sean A y B dos puntos de la órbita elíptica de un cometa alrededor del Sol, estando A más alejado del Sol que B. a) Hacer un análisis energético del movimiento del cometa y comparar los valores de las energías cinética y potencial en A y en B. b) ¿En cuál de los dos puntos A o B es mayor el módulo de la velocidad? ¿Y de la aceleración?.

8. Razonar las repuestas a las siguientes preguntas: a) Si el cero de energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m se sitúa en la superficie de la Tierra, ¿cuál es el valor de la energía potencial de la partícula cuando ésta se encuentra a una distancia infinita de la Tierra? b) ¿Puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza gravitatoria?, ¿puede ser negativa la energía potencial?.

9. a) Definir los términos “fuerza conservativa” y “energía potencial” y explicar la relación entre ambos. b) Si sobre una partícula actúan tres fuerzas conservativas de distinta naturaleza y una no conservativa, ¿cuántos términos de energía potencial hay en la ecuación de la energía mecánica de esa partícula? ¿Cómo aparece en dicha ecuación la contribución de la fuerza no conservativa?.

10. Cuestiones de campo gravitatorio

11. Dos satélites idénticos A y B se encuentran en órbitas circulares de diferente radio ($R_A > R_B$) alrededor de la Tierra. Contestar razonadamente a las siguientes preguntas: a) Si los dos satélites estuvieran en la misma órbita ($R_A = R_B$) y tuviesen distinta masa ($m_A < m_B$), ¿cuál de los dos se movería con mayor velocidad? ¿cuál de ellos tendría más energía cinética?.

13. Contestar razonadamente a las siguientes preguntas: a)¿Puede asociarse una energía potencial a una fuerza de rozamiento? b) ¿Qué tiene más sentido físico, la energía potencial en un punto o la energía potencial entre dos puntos?

14. Explicar las relaciones que existen entre trabajo, variación de energía cinética y variación de energía potencial de una partícula que se desplaza bajo la acción de varias fuerzas. ¿Qué indicaría el hecho de que la energía mecánica no se conserve? b) ¿Puede ser negativa la energía cinética de una partícula? ¿Puede ser negativa su energía potencial en un punto? Razonar las repuestas.

15. Comentar las observaciones siguientes y razonar si son ciertas o falsas: a) El trabajo de una fuerza conservativa aumenta la energía cinética de la partícula y disminuye su energía potencial. b) El trabajo de una fuerza no conservativa aumenta la energía potencial de la partícula y disminuye su energía mecánica.

16. Una partícula de masa m, situada en un punto A, se mueve en línea recta hacia otro punto B, en una región en la que existe un campo gravitatorio creado por una masa M. a) Si el valor del potencial gravitatorio en el punto B es menor que en el punto A, razonar si la partícula se acerca o se aleja de M. b) Explicar las transformaciones energéticas de la partícula durante el desplazamiento indicado y escribir su expresión. ¿Qué cambios cabría esperar si la partícula fuera de A a B siguiendo una trayectoria no rectilínea?.

18. Se desea colocar un satélite en una órbita circular, a una cierta altura sobre la Tierra. a) Explicar las variaciones energéticas del satélite desde su lanzamiento hasta su situación orbital. b)¿Influye la masa del satélite en su velocidad orbital?.

20. La masa de la Luna es 0,01 veces la de la Tierra y su radio es 0,25 veces el radio terrestre. Un cuerpo, cuyo peso en la Tierra es de 800 N, cae desde una altura de 50 m sobre la superficie lunar. a) Determinar la masa del cuerpo y su peso en la Luna. b) Realizar el balance de energía en el movimiento de caída y calcular la velocidad con que el cuerpo llega a la superficie. $g_T = 10\ ms^{-2}$.

21. Un cuerpo se lanza hacia arriba por un plano inclinado de 30º, con una velocidad inicial de 10 ms^{-1}. a) Explicar cualitativamente cómo varían las energías cinética, potencial y mecánica del cuerpo durante la subida. b) ¿Cómo varía la longitud recorrida si se duplica la velocidad inicial? ¿ Y si se duplica el ángulo del plano?. $g = 10\ ms^{-2}$.

22. a) Explicar la influencia que tiene la masa y le radio de un planeta en la aceleración de la gravedad en su superficie y en la energía potencial de una partícula próxima a su superficie. b) Imaginemos que la Tierra aumentara su radio al doble y su masa al cuádruple, ¿cuál sería el nuevo valor de g?, ¿y el nuevo período de la Luna?. $G = 6{,}67.10^{-11}\ Nm^2\ kg^{-2}$; $M_T = 6.10^{24}$ kg ; R_T= 6400 km; $M_L = 7.10^{22}$ kg; R_L= 1600 km.

23. Un satélite artificial en órbita geoestacionaria es aquel que , al girar con la misma velocidad angular de rotación de la Tierra, se mantiene sobre la misma vertical. a) Explicar las características de esa órbita y calcular su altura respecto a la superficie de la Tierra. b) Razonar qué valores obtendría para la masa y el peso de un cuerpo situado en dicho satélite sabiendo que su masa en la Tierra es de 20 kg. $G = 6{,}67.10^{-11}\ Nm^2\ kg^{-2}$; $M_T = 6.10^{24}$ kg ; R_T= 6400 km.

24. Un satélite artificial de 1000 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 12000 km de radio. a) Explicar las variaciones de energía cinética y potencial del satélite desde su lanzamiento en la superficie terrestre hasta que alcanzó su órbita y calcular el trabajo realizado. b) ¿Qué variación ha experimentado el peso del satélite respecto del que tenía en la superficie terrestre?. $G = 6{,}67.10^{-11}\ Nm^2\ kg^{-2}$; $M_T = 6.10^{24}$ kg ; R_T= 6400 km.

25. Una fuerza conservativa actúa sobre una partícula , la desplaza desde un punto x_1 hasta otro punto x_2, y realiza un trabajo de 50J. a) Determinar la variación de energía potencial de la partícula en ese desplazamiento. Si la energía potencial de la partícula es cero en x_1, ¿cuánto vale en x_2 ? b) Si la partícula, de 5g, se mueve bajo la influencia exclusiva de esa fuerza, partiendo del reposo en x_1, ¿cuál será la velocidad en x_2? ¿cuál será la variación de energía mecánica?

26. Se eleva un cuerpo de 200 kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura de 5000 km. a) Explicar las transformaciones energéticas que tienen lugar y calcular el trabajo mínimo necesario. b) Si, por error, hubiéramos supuesto que el campo gravitatorio es uniforme y de valor igual al que tiene en la superficie de la Tierra, razonar si el valor del trabajo sería mayor, igual o menor que el calculado en el apartado a). $G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2\ kg^{-2}$; $M_T = 6.10^{24}$ kg ; R_T= 6400 km.

27. Un satélite se encuentra a una altura de 600 km sobre la superficie de la Tierra, describiendo una órbita circular. a) Calcular el tiempo que tarda en dar una vuelta completa, razonando la estrategia seguida para dicho cálculo. b) Si la velocidad orbital disminuyera, explique si el satélite se acercaría o se alejaría de la Tierra, e indicar que variaciones experimentarían la energía potencial, la energía cinética y la energía mecánica del satélite. $G = 6{,}67.10^{-11}\ Nm^2\ kg^{-2}$; $M_T = 6.10^{24}$ kg ; R_T= 6400 km.

30. Un cuerpo, inicialmente en reposo a una altura de 150 km, sobre la superficie terrestre, se deja caer libremente. a) Explicar cualitativamente cómo varían las energías cinética, potencial y mecánica del cuerpo durante el descenso, si se supone nula la resistencia del aire, y determine la velocidad del cuerpo cuando llega a la superficie terrestre. b) Si, en lugar de dejar caer el cuerpo, lo lanzamos verticalmente hacia arriba desde la posición inicial, ¿cuál sería su velocidad de escape?. $G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2\ kg^{-2}$; $M_T = 6.10^{24}$ kg ; R_T= 6400 km.

31. Dos partículas de masas m_1 = 2 kg y m_2 = 5 kg están situadas en los puntos P1(0,2) y P2(1,0) respectivamente. a) Dibujar el campo gravitatorio producido por cada una de las masas en el punto 0(0,0) m y en el punto P(1,2) m y calcular el campo gravitatorio total en el punto P. b) Calcular el trabajo necesario para desplazar una partícula de 0,1 kg desde el punto 0 al P.