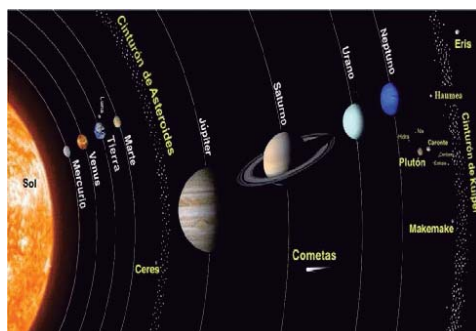


Tema 01

La gravitación universal



IES Padre Manjón
Prof: Eduardo Eisman

01. La gravitación universal: Índice

CONTENIDOS

1. El movimiento de los planetas a través de la Historia · 2. Nociones actuales sobre el sistema solar · 3. La traslación de los planetas · 4. Precedentes de la ley de gravitación · 5. La ley de gravitación universal · 6. Consecuencias de la ley de gravitación universal · 7. Análisis de los factores que intervienen.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE

1. Contextualizar las leyes de Kepler en el estudio del movimiento planetario.

1.1. Comprueba las leyes de Kepler a partir de tablas de datos astronómicos correspondientes al movimiento de algunos planetas.

1.2. Describe el movimiento orbital de los planetas del Sistema Solar aplicando las leyes de Kepler y extrae conclusiones acerca del periodo orbital de los mismos.

2. Asociar el movimiento orbital con la actuación de fuerzas centrales y la conservación del momento angular.

2.1. Aplica la ley de conservación del momento angular al movimiento elíptico de los planetas, relacionando valores del radio orbital y de la velocidad en puntos de la órbita.

2.2. Utiliza la ley fundamental de la dinámica para explicar el movimiento orbital de diferentes cuerpos como satélites, planetas y galaxias, relacionando el radio y la velocidad orbital con la masa del cuerpo central.

3. Determinar y aplicar la ley de Gravitación Universal a la estimación del peso de los cuerpos y a la interacción entre cuerpos celestes teniendo en cuenta su carácter vectorial.

3.1. Expresa la fuerza de la atracción gravitatoria entre dos cuerpos cualesquiera, conocidas las variables de las que depende.

3.2. Compara el valor de la atracción gravitatoria de la Tierra sobre un cuerpo en su superficie con la acción de cuerpos lejanos sobre el mismo cuerpo.

1.1 El movimiento de los planetas a través de la historia

- **Teoría geocéntrica de Pitágoras:** 569 - 500 a.c. Filósofo y matemático griego.
- La escuela pitagórica explicó la estructura del universo en términos matemáticos: **el número es el principio de todo**.
- **El gran Fuego Central**, origen de todo, se relacionaba con el Uno, origen de los números.
- La Tierra, el Sol, la Luna y los Planetas giraban alrededor de ese Fuego Central.
- El periodo de revolución de la Tierra en torno al fuego central era de 24 horas, a quien le ofrecía siempre su cara oculta.
- **Los periodos de la Luna y el Sol eran un mes y un año respectivamente**.
- El universo concluiría en una **esfera celeste de estrellas fijas**, y más allá se encontraba el Olimpo.
- El número de cuerpos que formaban el universo era de 10 (obsesión por los números).
- Como solo observaban nueve, suponían que el décimo estaba situado entre la Tierra y el gran fuego, al que llamaron antitierra.



Pitágoras nació en Samos hacia el año 569 a.C.

1.2 El movimiento de los planetas a través de la historia

- **Teoría geocéntrica de Aristóteles:** 384 - 322 a.c. Filósofo griego.
- Según las ideas aristotélicas, **la Tierra inmóvil se encuentran en el centro del Universo**, mientras que los restantes cuerpos celestes, giran con movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra.
- **El Universo está formado por cuatro elementos** de la región terrestre: Tierra, Agua, Aire, Fuego;
- **Más la Quintaesencia o Éter** que forma los cuerpos celestes.
- **El modelo geocéntrico de Aristóteles** defiende una visión antropocéntrica del universo al situar al hombre, y con él a la Tierra, como centro del universo.
- **Las ideas de Aristóteles sobre el Universo predominaron en el mundo científico cerca de 20 siglos.**
- Tierra: Luna Mercurio Venus Sol Marte Júpiter Saturno Estrellas lejanas

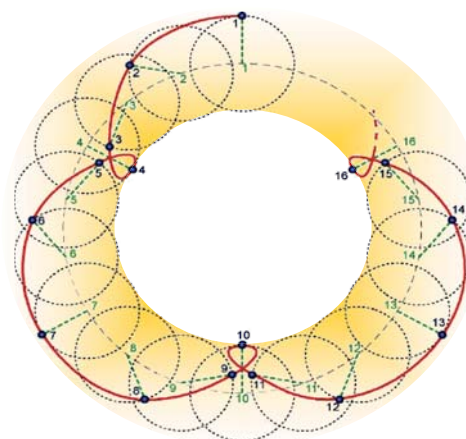


1.3 El movimiento de los planetas a través de la historia

- **Teoría geocéntrica de Ptolomeo:** 100–170 d.c. Astrónomo greco-egipcio. Vivió en Alejandría (127-145).
- Su obra cumbre Megiste (El más grande), en árabe Almagesto, incluye un catálogo de 1022 estrellas, basado en el catálogo de Hiparco.
- **Defendió el modelo geocéntrico de de Aristóteles** (la Tierra es el centro del Universo) que dominó el pensamiento islámico y occidental durante la edad media, hasta el s.XVI. (Copérnico).

- Ptolomeo observó que los planetas realizaban **movimientos retrógrados**, volviendo sobre su trayectoria formando lazos en la esfera celeste.

- Postuló que los planetas (salvo el Sol y la Luna) efectuaban dos tipos de movimientos: orbital (en el **epiciclo**) y otro que llevaba a cabo el centro del epiciclo alrededor de la Tierra en la órbita llamada **deferente**.

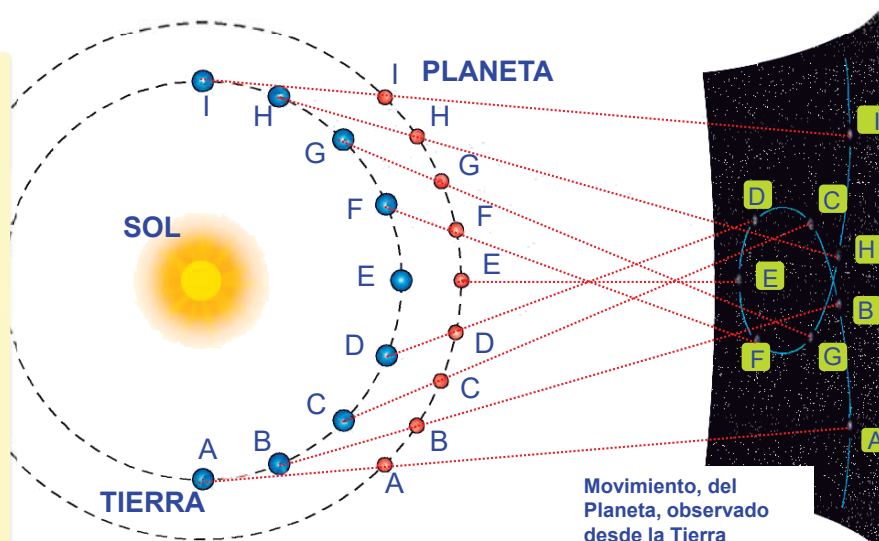


- El modelo de los epiciclos no daba respuesta a las caprichosas órbitas de algunos planetas, por lo que **hubo que introducir varios epiciclos, e incluso epiciclos dentro de otros epiciclos**.

1.4 El movimiento de los planetas a través de la historia

- **Teoría heliocéntrica de Copérnico:** 1473–1543 d.c. Astrónomo polaco.
- Se basó en escritos de astrónomos griegos, como Aristarco de Samos.
- En su obra más importante, Revolutionibus Orbium Coelestium 1543, el Sol está inmóvil y los planetas, incluida la Tierra, giran en órbitas circulares alrededor de él: **modelo heliocéntrico**.
- Las estrellas están fijas a gran distancia. Sus ideas tardaron en tomarse en serio.

- Desde la Tierra se apreciaba que planetas como Mercurio y Venus, que están más cercanos al Sol, tenían **un brillo variable** a lo largo del año, parecía indicar que las **distancias con respecto a la Tierra variaban** y por tanto no podían girar alrededor de esta.
- Se llegó a la conclusión que todos los planetas tenían que girar alrededor del Sol.



- Nicolás Copérnico establece los periodos orbitales alrededor del Sol (muy aproximados a los que hoy conocemos) y las distancias relativas de los planetas al Sol.

1.5 El movimiento de los planetas a través de la historia

- **Teoría heliocéntrica de Galileo Galilei:** 1564 Pisa – 1642 Florencia. Astrónomo y físico italiano.
- En 1609 construyó su primer telescopio con el que observó el cielo.
- Hace una defensa del sistema copernicano aportando pruebas.
- **Descubrió en sus observaciones:**

- **la Vía Láctea**
- **los Cráteres Lunares**
- **los Satélites de Júpiter**
- **las Manchas Solares**
- **Las Fases de Venus**



Galileo Galilei. Pisa 1564

- Su obra, **Dialogo sobre los dos grandes sistemas del mundo** (1632), está escrita en forma de dialogo entre tres personajes:
- **Salviati** que defiende las ideas de Galileo, **modelo heliocéntrico**.
- **Sagredo** que hace las preguntas y se deja convencer por Salviati.
- **Simplicio** que defiende la teoría de Ptolomeo.
- Es uno de los creadores del Método Científico.
- Fue profesor de matemáticas de la Universidad de Padua.
- La Inquisición le hizo abjurar.
- Procesado por el papa Urbano IV y confinado en su casa hasta su muerte.

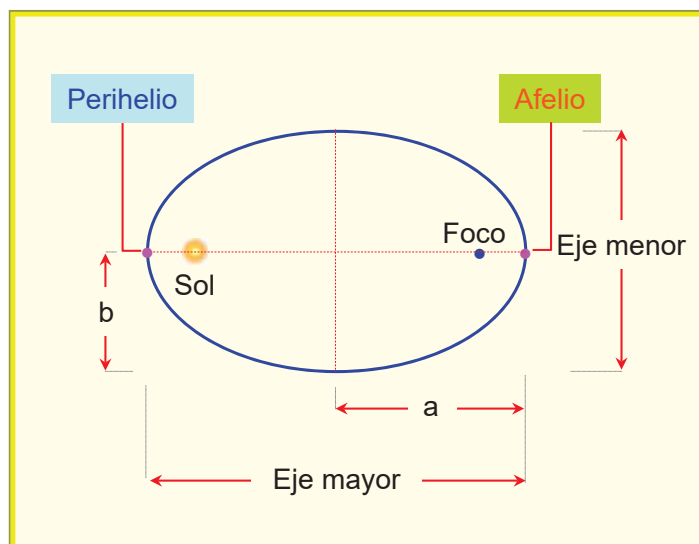
1.6 El movimiento de los planetas a través de la historia

- **Teoría heliocéntrica de Johannes Kepler:** 1571 – 1630. Astrónomo alemán.
- Basándose en medidas precisas del danés **Ticho Brahe (1546-1601)** calcula las órbitas de los planetas, especialmente Marte, y enuncia las tres leyes que llevan su nombre.
- Cien años después, Newton, demostró que estas leyes son la consecuencia de una sola fuerza que existe entre dos masa cualesquiera y desarrolló su **Teoría de la Gravitación Universal**.

• Leyes de Kepler

- **Primera ley Kepler:**
- Las órbitas de las planetas son elípticas. El Sol ocupa uno de los focos.

- **Afelio:** es la posición del extremo del semieje mayor más alejada del Sol.
- **Perihelio:** es la posición más cercana, al Sol.

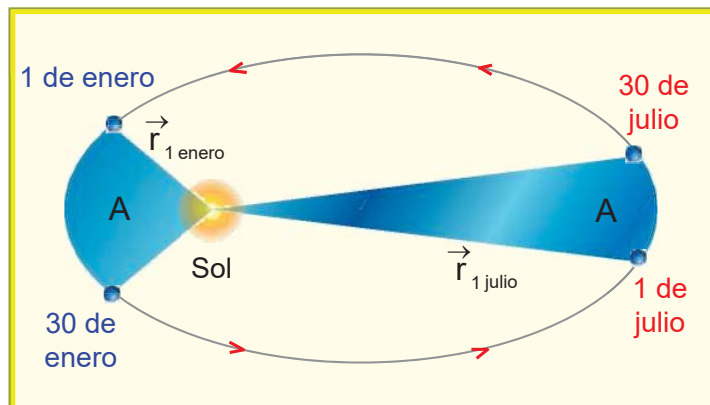


1.7 El movimiento de los planetas a través de la historia

- Segunda ley de Kepler:
- El radio que une el planeta con el Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales: la velocidad areolar es constante.

- Consecuentemente el planeta va más deprisa al pasar cerca del Sol.
- Las dos primeras leyes se publican en el año 1609 en su obra Astronomía Nova.

$$V_{\text{areolar}} = \frac{dA}{dt} = cte$$



- Tercera ley de Kepler:
- Los cuadrados de los períodos orbitales de los planetas son proporcionales a los cubos de las distancias medias al Sol.

$$T^2 = k \cdot a^3$$

- Esta ley es publicada en el año 1618 en su obra Armonías del Mundo.
- Las leyes de Kepler permiten deducir la Teoría de la Gravitación Universal.

1.8 El movimiento de los planetas a través de la historia

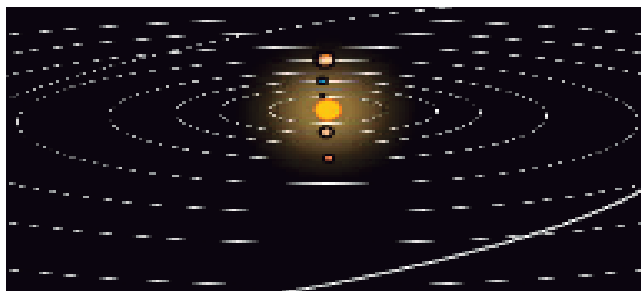
- Comprobación de la tercera ley de Kepler

Planeta	a Distancia al Sol (UA)	T Período de revolución (a)	T^2 (años) ²	a^3 (UA) ³	$K = \frac{T^2}{a^3}$
• Mercurio	0,387	0,241	0,058	0,058	1
• Venus	0,723	0,615	0,378	0,378	1
• Tierra	1,000	1,000	1,000	1,000	1
• Marte	1,524	1,881	3,538	3,540	1
• Júpiter	5,203	11,860	140,700	140,800	1
• Saturno	9,539	29,460	867,900	868,000	1
Urano	19,198	84	7056	7075	0,997
Neptuno	29,987	165	27225	26964	1,0097

- Planetas conocidos en la época en la que vivió KEPLER.

2.1 Nociones actuales sobre el sistema solar

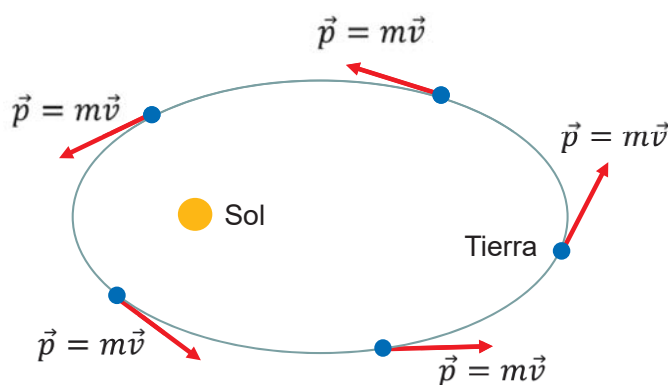
- El Sol no es centro de nada y nuestro sistema planetario es uno más.
- Nuestra galaxia (Vía Láctea) es una de los billones de galaxias que existen.



- Todos los planetas describen órbitas planas alrededor del Sol, casi todas ellas en el mismo plano.
- Todos los planetas se trasladan en el mismo sentido alrededor del Sol.
- El eje de rotación (excepto Urano y Plutón), es prácticamente perpendicular al plano de la órbita.
- Todos los planetas efectúan dos movimientos: rotación y traslación.

3.1 La traslación de los planetas

- Al estudiar la traslación de un planeta o satélite los consideraremos como puntos materiales dotados de masa.



- La magnitud física que nos informa del estado de movimiento de un cuerpo es el **momento lineal o cantidad de movimiento**.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

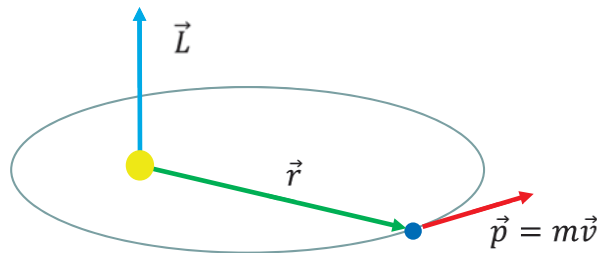
- Sin embargo esta magnitud no permanece constante en el movimiento planetario.

3.2 La traslación de los planetas

- El momento angular se define como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

- Depende del origen de referencia que se escoja



- La dirección de \vec{L} es perpendicular al plano que forman \vec{r} y \vec{p}
- Su sentido se determina por la regla de la mano derecha
- El módulo viene dado por la expresión $L = r m v \operatorname{sen} \alpha$
- Su unidad en el S.I. es $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
- Se demuestra que el momento angular, es la magnitud física que permanece constante en el movimiento planetario.

3.3 La traslación de los planetas

- Conservación del momento angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

- El momento angular de un cuerpo varía cuando sobre él actúa el momento de una fuerza:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

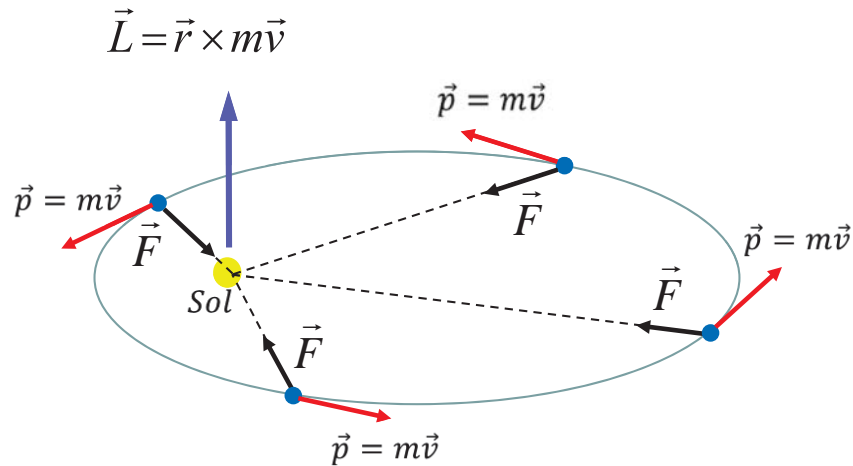
- El momento angular será constante cuando:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$$

- Cuando no actúa ninguna fuerza ($\vec{F} = 0$).
- Cuando \vec{r} y \vec{F} sean paralelos (**fuerzas centrales**). En este caso las fuerzas van dirigidas siempre al mismo punto.
- Dado que \vec{L} es constante, la **trayectoria es siempre plana**.

3.4 La traslación de los planetas

- **Consecuencias de la constancia del momento angular**



- Las órbitas de los planetas son estables y planas.
- La fuerza que gobierna el movimiento planetario es central.
- Los órbitas de los satélites en torno a los planetas son estables y planas.
- La fuerza que gobierna el movimiento de los satélites es central.

4.1 Precedentes de la ley de gravitación

- La fuerza que gobierna el movimiento de los astros es de tipo centrípeta, es decir, está dirigida hacia un punto.

- **Hooke y Halley** (en la época de Newton) suponían que la fuerza que gobierna el movimiento de los planetas era:
- **atractiva, centrípeta y disminuía con el cuadrado de la distancia.**

- Newton pensó que esa fuerza era la misma que hacía que una piedra cayera al suelo.
- Supuso que la Luna “caía” de forma continua igual que un proyectil. Así halló que la aceleración de caída disminuía con el cuadrado de la distancia.

- **La fuerza centrípeta:**
$$F_c = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r = m \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

- **De acuerdo con la 3ª ley de Kepler:**
$$F_c = m \frac{4\pi^2}{T^2} r = m \frac{4\pi^2}{k r^3} r = m \frac{4\pi^2}{k} \frac{1}{r^2}$$

- Las fuerzas que gobiernan los movimientos planetarios son centrípetas.
- Dichas fuerzas varían según el inverso del cuadrado de la distancia.
- Pero, ¿cuál era el significado físico de la constante k de la 3ª ley de Kepler?

4.2 Precedentes de la ley de gravitación. Ejercicio

- Teniendo en cuenta que la aceleración de “caída de la Luna hacia la Tierra” es de aproximadamente $0,0027 \text{ m/s}^2$, y que esta aceleración se debe a una fuerza centrípeta que responde a la expresión anterior.
- Determina el valor de k para el movimiento lunar despejándolo de dicha expresión.
- Compáralo posteriormente con el que se obtendría a partir de la tercera ley de Kepler.

- **Valor de k para el movimiento de “caída de la Luna”:**

$$F_c = m \frac{4\pi^2}{k} \frac{1}{r^2} = ma \Rightarrow k = \frac{4\pi^2}{a r^2} = 9,9 \cdot 10^{-14} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

- **Valor de k de acuerdo con la 3ª ley de Kepler:**

$$k = \frac{T^2}{r^3} = 9,9 \cdot 10^{-14} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

- De la coincidencia de resultados se asume que la fuerza que gobierna el movimiento de los planetas es centrípeta, de acuerdo con la 3ª ley de Kepler.
- La fuerza que hace caer una manzana, girar un satélite o “caer la Luna” es la misma: es centrípeta y depende inversamente del cuadrado de la distancia.

5.1 La ley de gravitación universal

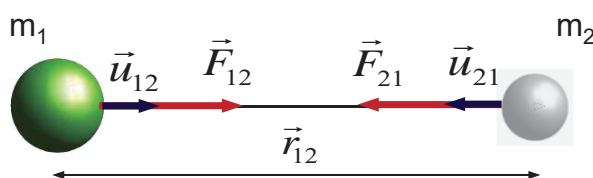
- **Issac Newton:** 1642-1727. Matemático, físico y astrónomo británico.
- Padre de la física clásica, por sus tres principios. Desde 1667 profesor en Cambridge.
- **Teoría de la Gravitación Universal.**
- **Descomposición de la luz blanca.**
- **Cálculo infinitesimal junto con Leibniz.**
- **Binomio de Newton.**
- **Anillos de Newton.**
- **Teoría corpuscular de la luz.**
- **Construyó los primeros telescopios de reflexión.**
- Su gran obra, “**Los Principios Matemáticos de la Filosofía Natural**”, publicada en 1687, es el “final de la revolución iniciada por Copérnico”.



Isaac Newton nació en Woolsthorpe, en 1642.

- **Teoría de la Gravitación Universal:**

- La interacción gravitatoria entre dos cuerpos es atractiva; una fuerza central directamente proporcional a las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa (desde sus centros).

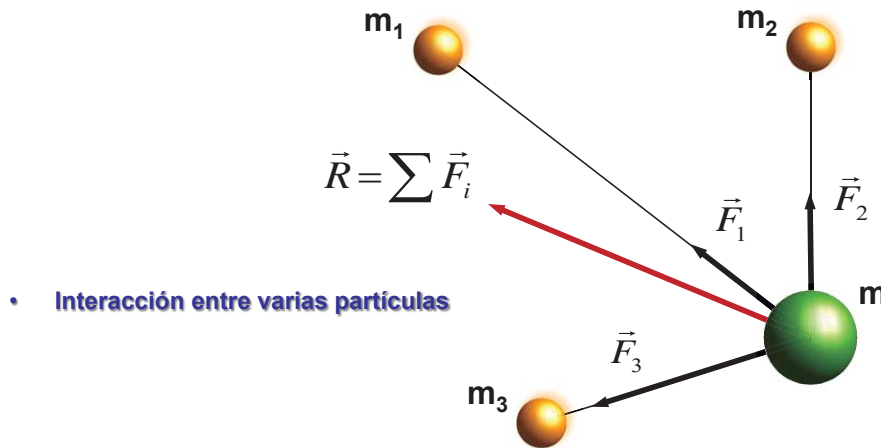


$$\vec{F} = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

- Siendo $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
- Una constante universal
- Determinada experimentalmente por Cavendish.

5.2 La ley de gravitación universal: principio de superposición

- La fuerza con que interaccionan dos masas es independiente de la presencia de otras; por tanto el **Principio de Superposición dice**:
- La fuerza que ejerce un conjunto de masas sobre otra es igual a la suma de las fuerzas que ejercen cada una sobre ella, consideradas individualmente.



$$\vec{F}_{total\ sobre\ m} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \dots = \sum \vec{F}_i = \vec{R}$$

6.1 Consecuencias de la ley de gravitación universal

- **Aceleración de caída libre de los cuerpos en las superficies de los planetas**

- Un cuerpo de masa m se encuentra a una altura h sobre la superficie de la Tierra, se halla sometido a una fuerza:

$$F = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

- Dicha fuerza le comunica una aceleración:

$$a = \frac{F}{m} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

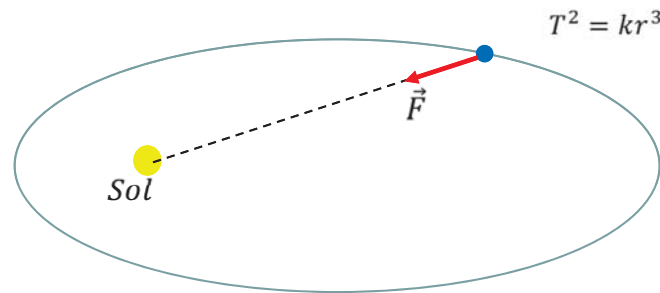
- La aceleración varía de manera inversa al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. Si $h \ll R_T$:

$$a = \frac{F}{m} = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$$

- **La aceleración con la que cae a la Tierra un objeto de masa m solo depende de la masa de la Tierra y no de la del objeto.**

6.2 Consecuencias de la ley de gravitación universal

- Significado físico de la constante k en la 3ª ley de Kepler



- Sea un planeta de masa m que orbita en torno al Sol:

$$G \frac{M_{Sol} m}{r^2} = m \frac{4\pi^2}{T^2} r \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{Sol}} r^3 \Rightarrow k = \frac{4\pi^2}{GM_{Sol}}$$

- El valor de k para el movimiento de todos los planetas del sistema solar es el mismo, y sólo depende de la masa del Sol pero no de la masa de cada planeta.

Determinación de las masas planetarias

- Consideremos un satélite de un planeta

$$G \frac{M_p m}{r^2} = m \frac{4\pi^2}{T^2} r \Rightarrow M_p = \frac{4\pi^2}{GT^2} r^3$$

7.1 Análisis de los factores que intervienen en la LGU

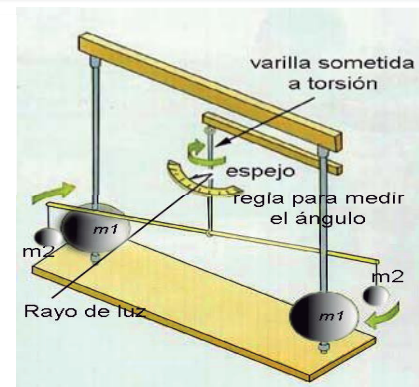
- Determinación de la constante de gravitación universal G

- Newton no mencionó la constante G .
- Para calcular G había que conocer la masa de la Tierra:

$$G = g \frac{R_T^2}{M_T}$$

- Cavendish (1731 – 1810)**, utilizando la balanza de torsión, logró medir la constante G . O, dicho de otra forma, ¡logró medir la masa de la Tierra!

- Es una constante universal: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$



Masa inercial y masa gravitacional

- Masa inercial, m_i** , es la medida cuantitativa de la inercia de un cuerpo.
- Masa gravitatoria, m_g** , es la responsable de la interacción gravitatoria.
- ¿La masa inercial es a su vez responsable de la gravitación?

$$F = G \frac{M_{Tg} m_g}{R_T^2} = m_i g \Rightarrow g = \frac{m_g}{m_i} G \frac{M_{Tg}}{R_T^2}$$

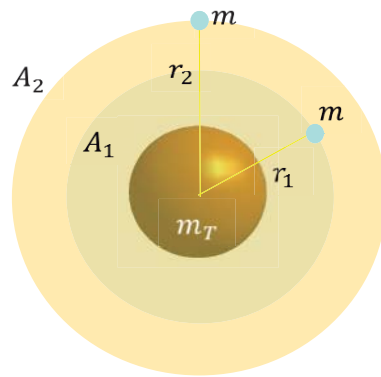
- Como g es la misma para todos los cuerpos, (m_g/m_i) siempre es igual para todos los cuerpos

- La masa inercial y la masa gravitacional son la misma magnitud.**

7.2 Análisis de los factores que intervienen en la LGU

- El inverso del cuadrado de la distancia

- La acción gravitatoria se distribuye por igual en todas direcciones, de cada una de las esferas de radios r_1 y r_2 .
- La masa del cuerpo está concentrada en su centro, como de si de un foco puntual se tratase.



$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{4\pi r_2^2}{4\pi r_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

- Es la ley del inverso del cuadrado de la distancia

8. Ejercicios

1. A partir de los datos orbitales terrestres con respecto al Sol ($T = 365$ días y distancia Tierra-Sol $1,496 \cdot 10^{11}$ m) determina cuanto tardará Júpiter en completar una órbita alrededor del Sol (en segundos y años terrestres) sabiendo que su distancia al Sol es de $7,78 \cdot 10^{11}$ m.
2. Un cuerpo de 3 kg de masa se mueve con una velocidad de $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ m/s. Determina su momento angular con respecto al origen (0,0) cuando el cuerpo se encuentra en el punto (4,1). ¿Qué dirección tiene el momento angular?
3. Teniendo en cuenta que la masa de la Tierra es de $6 \cdot 10^{24}$ kg, que su distancia media al Sol es $1,496 \cdot 10^{11}$ m y que su periodo orbital es de 365 días, determina:
 - a) Su momento angular de traslación respecto del Sol
 - b) La velocidad areolar del movimiento de traslación respecto del Sol.
 - c) A partir del valor anterior y dando por cierto que la distancia al sol permanece invariable en el transcurso de un día, determina que distancia recorre la Tierra en un día durante su movimiento orbital. Compáralo con el que se obtendría al dividir la longitud orbital entre los 365 días.
4. Si $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N.m²/kg², la masa de la Tierra = $6 \cdot 10^{24}$ kg y el radio de la Tierra es 6370 km, determina:
 - a) La fuerza con que la Tierra atrae a una piedra de 100 g.
 - b) La fuerza con que la piedra atrae a la Tierra.
 - c) El valor de la aceleración que adquiere la piedra sometida a esa fuerza.
 - d) El valor de la aceleración que adquiere Tierra sometida a esa misma fuerza.
 - e) La fuerza con que la Tierra atraerá a otra piedra a una piedra cuya masa es de 10 kg, así como la aceleración que adquiere.

8. Ejercicios

5. Tenemos cuatro partículas iguales de 2 kg de masa en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Determina el módulo de la fuerza gravitatoria que experimenta cada partícula debido a la presencia de las otras tres.

6. El diámetro de Venus es de 12120 km y su densidad media es de 5200 kg/m³. ¿Hasta que altura ascendería un objeto lanzado desde su superficie con una velocidad inicial de 30 m/s?

7. El satélite de Júpiter llamado Ío tiene un período de revolución de 42 horas 29 minutos, y su distancia media a Júpiter es de 422 000 km. ¿Cuál es la masa de Júpiter?

8. Si el período de un péndulo simple que oscila bajo ángulos pequeños viene dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

- ¿Qué le ocurriría a dicho período si lo alejáramos hasta el doble de la distancia que hay entre el péndulo y el centro de la Tierra?
- ¿Qué le ocurriría en ese mismo caso a la frecuencia de oscilación?