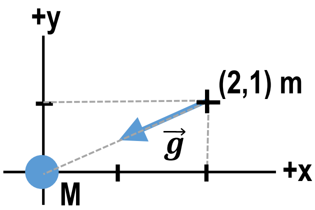
PROBLEMAS Y CUESTIONES SOBRE EL TEMA 2: INTERACCIÓN GRAVITATORIA.

2. Una masa de 8 kg está situada en el origen. Calcular:
a) Intensidad del campo gravitatorio y potencial gravitatorio en el punto (2,1) m.
b) Fuerza con que atraería a una masa m de 2 kg, y energía almacenada por dicha masa.
c) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar la masa m desde el punto (2,1) m al punto (1,1) m

a) Estamos ante el campo gravitatorio creado por una masa puntual.



Campo gravitatorio ($\vec{g}$)

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r \qquad \vec{r} = (2,1) - (0,0) = 2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}\; m$$

$$r = \sqrt{5}\; m \qquad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{2\,\vec{\imath}+\vec{\jmath}}{\sqrt{5}}$$

Sustituimos $\vec{g} = -\frac{6.67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 8\,kg}{(5m)^2}\cdot\frac{2\,\vec{\imath}+\vec{\jmath}}{\sqrt{5}} = -9{,}55\cdot 10^{-11}\,\vec{\imath} - 4{,}77\cdot 10^{-11}\,\vec{\jmath}\;\;Nkg^{-1}$

Potencial gravitatorio (V)

$$V = -\frac{GM}{r} = -\frac{6.67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 8\,kg}{\sqrt{5}\,m} = -2{,}39\cdot 10^{-10}\,J\,kg^{-1}$$

b) La fuerza gravitatoria que sufre la masa m colocada en el punto, viene dada por.

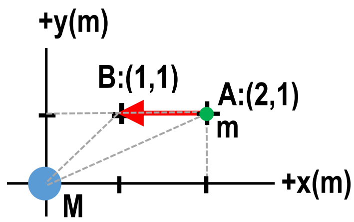
$$\vec{F}_g = m\cdot\vec{g} = 2\,kg\cdot(-9{,}55\cdot 10^{-11}\,\vec{\imath} - 4{,}77\cdot 10^{-11}\,\vec{\jmath}\;\;Nkg^{-1}) =$$
$$= -1{,}91\cdot 10^{-10}\,\vec{\imath} - 9{,}55\cdot 10^{-11}\,\vec{\jmath}\;\;N$$

La energía potencial almacenada $Epg = m\cdot V = 2\,kg\cdot(-\,2{,}39\cdot 10^{-10}\,J\,kg^{-1}) = -\,4{,}78\cdot 10^{-10}\,J$

c) Para calcular el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria durante el desplazamiento, tenemos en cuenta que la fuerza gravitatoria es conservativa.

Por lo tanto $W_{Fg} = -\Delta Ep_g = -\left(Ep_{gB} - Ep_{gA}\right) = Ep_{gA} - Ep_{gB}$

Aquí: A: (2,1) m Punto inicial B: (1,1) m . Punto final.



Conocemos ya la energía potencial en A $Ep_{gA} = -\,4{,}78\cdot 10^{-10}$ J

Calculamos la energía potencial almacenada en B

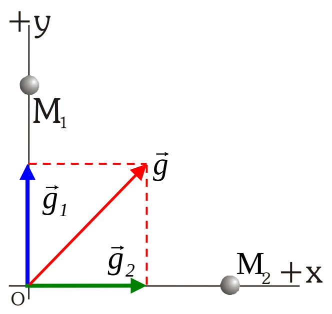
Ahora $r_B = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\; m$

$$Ep_{gB} = -\frac{GMm}{r_B} = -\frac{6.67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 8\,kg\cdot 2\,kg}{\sqrt{2}\,m} = -7{,}54\cdot 10^{-10}\,J$$

Y el trabajo realizado $W_{Fg} = Ep_{gA} - Ep_{gB} = -4{,}78\cdot 10^{-10}\,J + 7{,}54\cdot 10^{-10}\,J = 1{,}58\cdot 10^{-10}\,J$

La fuerza gravitatoria realiza un trabajo positivo, ya que va a favor del desplazamiento.

3. Dos masas de 5 kg se encuentran en los puntos (0,2)m y (2,0) m. Calcular:
a) Intensidad de campo gravitatorio y potencial gravitatorio en el origen.
b) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar una masa de 1 kg desde el infinito hasta el origen.



a) Campo gravitatorio: Fuerza gravitatoria que se ejerce por unidad de masa sobre un cuerpo situado en un punto del campo gravitatorio. En el punto A influyen las dos masas puntuales, por lo que aplicamos el principio de superposición. $\vec{g}_P = \vec{g}_{1P} + \vec{g}_{2P}$

El campo producido por la masa 1:

$M_1 = 5\ kg$; $\vec{r}_1 = (0,0) - (0,2) = (0,-2)m = -2\vec{j}\ m$;

$$r_1 = 2\ m \quad ; \quad \vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{-2\vec{j}m}{2m} = -\vec{j}$$

$$\vec{g}_{1P} = -\frac{GM_1}{r_1^{\,2}} \cdot \vec{u}_{r1} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{2^2} \cdot (-\vec{j}) \quad N/kg = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ N/kg$$

Del mismo modo calculamos el campo producido por la masa 2 en (0,0):

$M_1 = 5\ kg$; $\vec{r}_1 = (0,0) - (2,0) = (-2,0)m = -2\vec{i}\ m$;

$$r_1 = 2\ m \quad ; \quad \vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{-2\vec{i}\ m}{2\ m} = -\vec{i}$$

$$\vec{g}_{1P} = -\frac{GM_1}{r_1^{\,2}} \cdot \vec{u}_{r1} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{2^2} \cdot (-\vec{i}) \quad N/kg = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{i}\ N/kg$$

con lo que $\vec{g}_{(0,0)} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} + 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ N/kg$

Para calcular el potencial (energía almacenada por unida de masa), aplicamos el principio de superposición:

$V_P = V_{1P} + V_{2P}$ Escogiendo el nivel cero de potencial en el infinito

$$V_P = -\frac{GM_1}{r_{1P}} - \frac{GM_2}{r_{2P}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{2} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{2} = -3{,}34 \cdot 10^{-10}\ J/kg$$

b)

Calculamos el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria en ese desplazamiento.

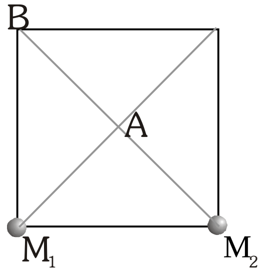
$$W_{Fg} = -\Delta Epg = -(Epg_O - Epg_\infty) = Epg_\infty - Epg_O = m \cdot V_\infty - m \cdot V_O$$

Teniendo en cuenta el origen de potencial escogido, el potencial a una distancia infinita será nulo. Así

$$W_{Fg} = -m \cdot V_O = -1kg \cdot (-3{,}34 \cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg}) = 3{,}34 \cdot 10^{-10}\ J$$

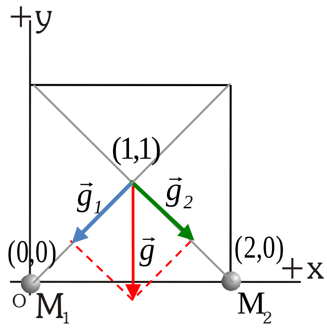
El trabajo que realiza la fuerza gravitatoria es positivo (la fuerza gravitatoria va a favor del desplazamiento)

20.(a) Dos partículas de 10 kg se encuentran situadas en dos vértices de un cuadrado de 2 m de lado, como indica la figura. Calcula campo y potencial gravitatorio en el punto A, así como el trabajo necesario para llevar la unidad de masa desde el punto A al B.



Resolvemos el primer caso:
Nos encontramos ante el campo gravitatorio creado por dos masas puntuales, por lo que aplicaremos el principio de superposición (el efecto que producen varias masas es igual a la suma de los efectos de cada partícula por separado)

Campo gravitatorio: Fuerza gravitatoria que se ejerce por unidad de masa sobre un cuerpo situado en un punto del campo gravitatorio. En el punto A influyen las dos masas puntuales, por lo que aplicamos el principio de superposición. $\vec{g}_A = \vec{g}_{1A} + \vec{g}_{2A}$



El campo producido por la masa 1:

$M_1 = 10\ kg$; $\vec{r}_1 = (1,1) - (0,0) = (1,1) m = \vec{i} + \vec{j}\ m$;

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ m \quad ; \quad \vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$\vec{g}_{1A} = -\frac{GM_1}{r_1^{\,2}} \cdot \vec{u}_{r1} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 10}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) = -2{,}36\cdot 10^{-10}\,\vec{i} - 2{,}36\cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}$$

Del mismo modo calculamos el campo producido por la masa 2 en P:(0,2):

$M_2 = 10\ kg$; $\vec{r}_2 = (1,1) - (2,0) = (-1,1) m = -\vec{i} + \vec{j}\ m$;

$$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ m \quad ; \quad \vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{-\vec{i} + \vec{j}\ m}{\sqrt{2}\ m} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$\vec{g}_{2A} = -\frac{GM_2}{r_2^{\,2}} \cdot \vec{u}_{r2} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 10}{2}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right)\tfrac{N}{kg} = 2{,}36\cdot 10^{-10}\,\vec{i} - 2{,}36\cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}$$

con lo que

$$\vec{g}_A = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = (-2{,}36\cdot 10^{-10}\,\vec{i} - 2{,}36\cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}) + (2{,}36\cdot 10^{-10}\,\vec{i} - 2{,}36\cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}) = -4{,}72\cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}$$

Para calcular el potencial (energía almacenada por unida de masa), aplicamos el principio de superposición:

$V_A = V_{1A} + V_{2A}$ Escogiendo el nivel cero de potencial en el infinito

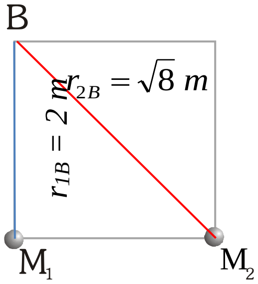
$$V_A = -\frac{GM_1}{r_{1A}} - \frac{GM_2}{r_{2A}} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 10}{\sqrt{2}} - \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 10}{\sqrt{2}} = -4{,}72\cdot 10^{-10} - 4{,}72\cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg} = -9{,}44\cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg}$$

Trabajo necesario para trasladar una masa de 1 kg desde el punto A al B.

Para calcular esto, tendremos en cuenta que la fuerza gravitatoria es conservativa, por lo que

$$W_{Fg} = -\Delta Ep_g = -(Ep_{gB} - Ep_{gA}) = Ep_{gA} - Ep_{gB} = m\cdot V_A - m\cdot V_B = m\cdot (V_A - V_B)$$

Conocemos el potencial en A ($-9{,}44\cdot 10^{-10}$ J/kg, calculado antes), pero necesitamos calcular el potencial en B



$$V_B = -\frac{GM_1}{r_{1B}} - \frac{GM_2}{r_{2B}} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 10}{2} - \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 10}{\sqrt{8}} =$$

$$= -3{,}34\cdot 10^{-10} - 2{,}36\cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg} = -5{,}70\cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg}$$

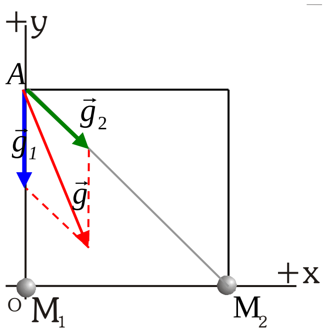
Así, $W_{Fg} = m \cdot (V_A - V_B) = 1\,kg \cdot (-9{,}44 \cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg} + 5{,}70 \cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}) = -3{,}74 \cdot 10^{-10}\ J$

Obtenemos un valor negativo para el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria, ya que ésta se opone al desplazamiento. Por lo tanto, deberemos realizar un trabajo externo (aplicando una fuerza exterior) de al menos el mismo valor, pero con signo contrario.

$$W_{ext} \geq 3{,}74 \cdot 10^{-10}\ J$$

Dos masas de 10 kg se encuentran situadas en los dos vértices inferiores de un cuadrado de 2 m de lado. Calcula el campo y el potencial gravitatorio en el vértice superior izquierdo del cuadrado.

Nos encontramos ante el campo gravitatorio creado por dos masas puntuales, por lo que aplicaremos el principio de superposición (el efecto que producen varias masas es igual a la suma de los efectos de cada partícula por separado)



Campo gravitatorio: Fuerza gravitatoria que se ejerce por unidad de masa sobre un cuerpo situado en un punto del campo gravitatorio. En el punto A influyen las dos masas puntuales, por lo que aplicamos el principio de superposición. $\vec{g}_A = \vec{g}_{1A} + \vec{g}_{2A}$

El campo producido por la masa 1:

$M_1 = 10\ kg$; $\vec{r}_1 = (0,2) - (0,0) = (2,0)m = 2\vec{j}\ m$;

$$r_1 = 2\ m \quad ; \quad \vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{2\vec{j}m}{2m} = \vec{j}$$

$$\vec{g}_{1A} = -\frac{GM_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{2^2} \cdot \vec{j}\quad N/kg = -1{,}67 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ N/kg$$

Del mismo modo calculamos el campo producido por la masa 2 en A:(0,2):

$M_2 = 10\ kg$; $\vec{r}_2 = (0,2) - (2,0) = (-2,2)m = -2\vec{i} + 2\vec{j}\ m$;

$$r_2 = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}\ m \quad ; \quad \vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{-2\vec{i} + 2\vec{j}\ m}{\sqrt{8}\ m} = \frac{-1}{\sqrt{8}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{8}}\vec{j}$$

$$\vec{g}_{2A} = -\frac{GM_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{8} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{8}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{8}}\vec{j}\right)\frac{N}{kg} = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}$$

con lo que

$$\vec{g}_{(0,0)} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = (-1{,}67 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}) + (8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}) = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 2{,}5 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}$$

Para calcular el potencial (energía almacenada por unida de masa), aplicamos el principio de superposición:

$V_A = V_{1A} + V_{2A}$ Escogiendo el nivel cero de potencial en el infinito

$$V_A = -\frac{GM_1}{r_{1A}} - \frac{GM_2}{r_{2A}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{2} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{\sqrt{8}} = -3{,}34 \cdot 10^{-10} - 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg} = -5{,}70 \cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg}$$

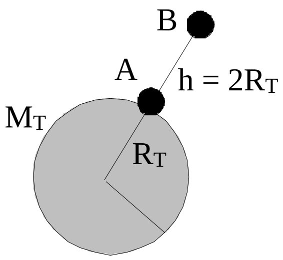
14.- Calcular:

a) Trabajo que hay que realizar para trasladar un cuerpo de 20 kg desde la superficie terrestre hasta una altura igual al radio de la Tierra. **($M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km)**

b) Velocidad a la que habría que lanzarlo para que alcanzara dicha altura

a)

Ya que la fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre el objeto apunta hacia el centro de la Tierra, debemos ejercer una fuerza en sentido contrario que al menos igual (iría con velocidad constante) a la gravitatoria en cada punto para realizar el desplazamiento.



Calculamos el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria en el desplazamiento.

$$W_{Fg} = -\Delta Ep_g = -(Ep_{gB} - Ep_{gA}) = Ep_{gA} - Ep_{gB} = m \cdot V_A - m \cdot V_B = m \cdot (V_A - V_B)$$

Calculamos el potencial en los puntos

- Inicial (A, superficie terrestre, $r_A = R_T = 6370\ km = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$)
- y final (B, a una altura h igual al radio terrestre, con lo que $r_B = R_T + h = 2 \cdot R_T = 12800\ km = 1{,}28 \cdot 10^7\ m$)

$$V_A = -\frac{GM_T}{r_A} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6} = -6{,}283 \cdot 10^7\ \tfrac{J}{kg}$$

$$V_B = -\frac{GM_T}{r_B} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{1{,}28 \cdot 10^7} = -3{,}127 \cdot 10^7\ \tfrac{J}{kg}$$

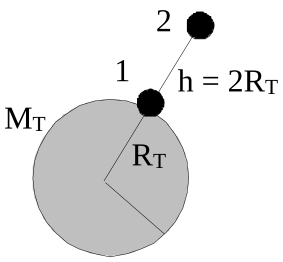
Por tanto, el trabajo

$$W_{Fg} = m \cdot (V_A - V_B) = 20\ kg \cdot (-6{,}283 \cdot 10^7\ \tfrac{J}{kg} + 3{,}127 \cdot 10^7\ \tfrac{J}{kg}) = -6{,}312 \cdot 10^8\ J$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es negativo ya que se opone al desplazamiento. Así, para mover el objeto, debemos realizar un trabajo externo $W_{ext} \geq 6{,}312 \cdot 10^8\ J$

b)

Resolvemos esta cuestión aplicando la conservación de la energía mecánica al movimiento de la roca. Tras el lanzamiento, la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la gravitatoria, que es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica ($E_M = Ec + Epg$) se mantiene constante. Esto nos permite calcular la velocidad con la que habría que lanzarlo desde la superficie terrestre suponiendo que no hubiera rozamiento con la atmósfera.



Escogemos el origen de energía potencial a una distancia infinita de la Tierra. Esto hace que la expresión usada para la energía potencial gravitatoria sea: $Epg = -\frac{GMm}{r}$

Situación inicial: ($v_1 = ?$; $r_1 = R_T$) $\quad E_{M1} = Ec_1 + Epg_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{R_T}$

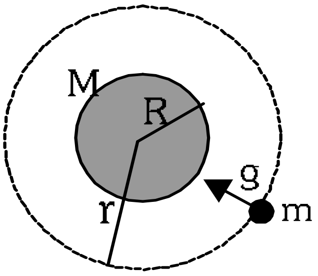
Situación final: ($v_2 = 0$; $r_2 = 2R_T$) $\quad E_{M2} = Ec_2 + Epg_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GMm}{r_2} = 0 - \frac{GMm}{r_2}$

La energía mecánica se mantiene constante: $E_{M1} = E_{M2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{R_T} = -\frac{GMm}{r_2}$

Sustituyendo $M = M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg
$r_1 = R_T = 6370\ km = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$
$r_2 = R_T + h = 2 \cdot R_T = 12800\ km = 1{,}28 \cdot 10^7\ m$
$m = 20\ kg$

Obtenemos que $v_1 = 7944{,}8\ m/s$. (aproximadamente 7,9 km/s) Con esa velocidad habría que lanzarlo.

16. Un satélite describe una órbita circular de radio 2 R_T en torno a la Tierra..
a) Determine su velocidad orbital.
b) Si el satélite pesa 5000 N en la superficie terrestre, ¿cuál será su peso en la órbita? Explique las fuerzas que actúan sobre el satélite.
(R_T = 6400 km ; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ; G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $Nm^2\ kg^{-2}$)



a)
La velocidad orbital es la velocidad que lleva el satélite en su órbita alrededor del planeta. Para calcularla, tendremos en cuenta que la única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria. $Fg = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$

También, al tratarse de un movimiento circular, sólo tendrá aceleración normal.

Aplicando la segunda ley de Newton: $F_g = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{r}$

Igualando ambas expresiones: $\frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$

Teniendo en cuenta que $M = M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg y que $r = 2 \cdot R_T = 12800\ km = 1{,}28 \cdot 10^7\ m$

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = 5{,}59 \cdot 10^3\ m \cdot s^{-1} = 5{,}59\ km/s$$

b)
El peso del satélite es la fuerza gravitatoria que el planeta ejerce sobre él. $Fg = m \cdot g = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$, en dirección radial y sentido hacia el centro del planeta (dibujo).
Sobre el satélite sólo actúa la fuerza gravitatoria, que es responsable de que describa el movimiento orbital, como ya se ha explicado en el apartado a)

El peso en la superficie terrestre nos permite conocer la masa del satélite $F_{g0} = m \cdot g_0$, donde g_0 es la gravedad superficial en la Tierra, que podemos considerar de aproximadamente 9,8 N/kg.
Así $F_{g0} = m \cdot g_0 \quad \rightarrow \quad 5000\ N = m \cdot 9{,}8\ \frac{N}{kg} \quad \rightarrow \quad m = 510{,}2\ kg$
Sustituyendo en la expresión de la fuerza gravitatoria en la órbita
$M = M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg y que $r = 2 \cdot R_T = 12800\ km = 1{,}28 \cdot 10^7\ m$

$Fg = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = 1246{,}23\ N$ Este es el peso del satélite en su órbita.

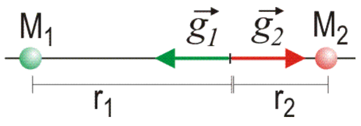
(Nota, este resultado puede variar según la aproximación que hagamos. Así, si consideramos que la gravedad superficial terrestre es de 10 N/kg, el resultado será de 1250 N)

CUESTIONES TEÓRICAS

¿Puede ser nulo el campo gravitatorio en alguna región del espacio cercano a dos partículas sabiendo que la masa de una de ellas es el doble que la de la otra? ii) ¿Y el potencial gravitatorio? Razone las respuestas apoyándose en un esquema.

La intensidad del campo gravitatorio ($\vec{g}$) es la fuerza por unidad de masa ejercida sobre una masa m que se encuentra inmersa en el campo gravitatorio. Es una magnitud **vectorial**, y si se anula en un punto, es porque la suma vectorial de las intensidades producidas por cada masa se anula, $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0 \ \rightarrow \ \vec{g}_1 = -\vec{g}_2$

Esto ocurre cuando ambos campos tiene igual módulo ($\frac{GM_1}{{r_1}^2} = \frac{GM_2}{{r_2}^2}$), igual dirección y sentidos opuestos. Como vemos en el esquema, este punto se encuentra en el segmento que une ambas partículas, y está más cerca de la masa menor.



El potencial gravitatorio (V) es la energía almacenada por unidad de masa en un punto del campo gravitatorio. Es una magnitud **escalar** y, si suponemos el origen de potenciales en el infinito, se calcularía, aplicando el principio de superposición, $V = V_1 + V_2 = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2}$

Vemos que no puede anularse en ningún punto cercano (sólo se anula a una distancia infinita), sería siempre una cantidad negativa.

Dos satélites idénticos A y B, describen órbitas circulares de diferentes radios, $r_A > r_B$, alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:

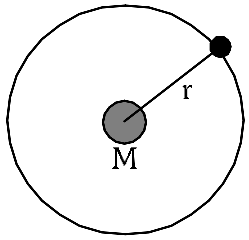
a) ¿Cuál de los dos tiene mayor energía cinética?.

b) Si los dos satélites estuvieran en la misma órbita $r_A = r_B$ y tuviesen distinta masa $m_A < m_B$, ¿Cuál de los dos tendría más energía cinética?

La energía cinética de un cuerpo en movimiento viene dada por $Ec = \frac{1}{2} m v^2$

Para el caso de un satélite que describe una órbita circular de radio *r* alrededor de un planeta, la velocidad se denomina *velocidad orbital*. Su expresión se obtiene a partir de la 2ª ley de Newton

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightarrow F_g = m \cdot a_n \rightarrow \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$



De este modo, la energía cinética del satélite queda

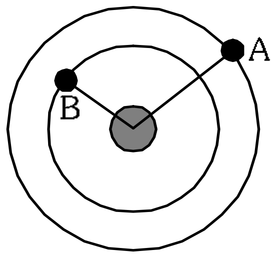
$$Ec = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \right)^2 = \frac{1}{2} m \frac{G \cdot M}{r} = \frac{G \cdot M \cdot m}{2r} \quad ,$$

donde m es la masa del satélite, y M la del planeta.

Visto esto, podemos responder fácilmente a las cuestiones planteadas.

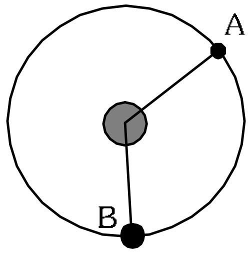
a) Las energías cinéticas correspondientes a ambos satélites serán

$$Ec_A = \frac{G \cdot M \cdot m_A}{2 \cdot r_A} \quad ; \quad Ec_B = \frac{G \cdot M \cdot m_B}{2 \cdot r_B}$$

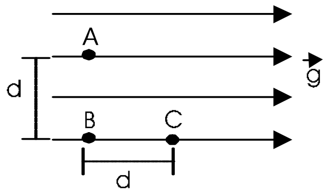


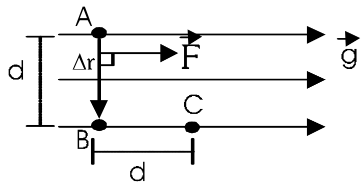
Como ambas masas son idénticas, la energía cinética va a depender exclusivamente de la distancia. Vemos que el satélite A, que está a mayor distancia, tendrá menor energía cinética. Por tanto, el satélite con mayor Ec será el B, que se encuentra más cerca.

b) Ahora ambos satélites se encuentran en órbitas de igual radio, pero las masas son diferentes. Aplicando las mismas expresiones del apartado a), vemos que el satélite de mayor masa tendrá mayor energía cinética. En este caso, será el B.



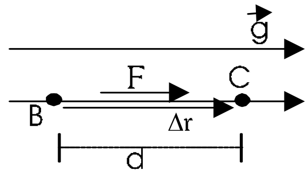
En una región del espacio existe un campo gravitatorio uniforme de intensidad g, representado en la figura por sus líneas de campo.
a) Razone el valor del trabajo que se realiza al trasladar la unidad de masa desde el punto A al B y desde el B al C.
b) Analice las analogías y diferencias entre el campo descrito y el campo gravitatorio terrestre.





a) Nos encontramos ante un campo gravitatorio de intensidad constante $\vec{g}$. La fuerza gravitatoria que ejercerá este campo sobre una partícula de masa *m* colocada en su interior vendrá dada por $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$, y también será constante. El trabajo que realiza esta fuerza en un desplazamiento, que en general se calcula con la integral $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$, podrá hacerse en este caso, al ser la fuerza constante, con la expresión $W_{AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot cos\,\alpha$.

Así, en el desplazamiento de A a B, el trabajo será $W_{AB} = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = mg \cdot d \cdot cos\,90^o = 0$ J, ya que la fuerza es perpendicular al desplazamiento.



En el desplazamiento de B a C, el trabajo será $W_{BC} = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = mg \cdot d \cdot cos\,0^o = m \cdot g \cdot d$. Obtenemos un trabajo positivo, ya que la fuerza favorece el desplazamiento. En este caso, ya que nos dicen que la unidad de masa, el trabajo será $W_{BC} = g \cdot d$

b) El campo gravitatorio descrito es similar al campo gravitatorio terrestre al nivel de la superficie, considerando la aproximación de que los desplazamientos efectuados son muy pequeños en comparación con el radio terrestre ($R_T \approx 6400\,km$). En ese caso $\vec{g}$ terrestre puede considerarse un campo constante y uniforme con todas las características del campo de esta cuestión. La única diferencia está en su orientación. La dirección y sentido del campo terrestre es la vertical y su sentido hacia abajo, aunque esto último puede ser también una cuestión de punto de vista, del sistema de referencia escogido.