Tema 2: Interacción gravitatoria

1. Interacción gravitatoria. Ley de gravitación universal

Introducción histórica:

La interacción gravitatoria es, de las cuatro interacciones fundamentales, la única conocida desde la antigüedad, si bien no fue explicada hasta finales del s. XVII. El hecho de que los cuerpos caen a la Tierra era considerado como algo natural, aunque no se creía que el movimiento de la Luna o los Planetas tuviera alguna relación con la gravedad.

Las ideas sobre la gravitación y la estructura del universo han ido evolucionando a lo largo de la historia. Hacemos aquí un breve resumen de las ideas principales.

Antigüedad: El conocimiento sobre el universo está ligado a creencias y mitología. Se plantea una distinción clara entere el Cielo (perfecto, la morada de los dioses) y la Tierra (imperfecta, morada de los hombres). Se cree que las Tierra es plana e inmóvil y que el universo no alcanza más allá de unos pocos km sobre la superficie.

Grecia Clásica: Teoría Geocéntrica: Tierra esférica, inmóvil en el centro del universo. El Sol y los planetas giran alrededor. Conocida desde muy antiguo. Desarrollada por Platón y Eudoxo, entre otros.

Aristóteles (s. IV a.C): Consolida la teoría geocéntrica. Los Planetas siguen órbitas circulares,

Aristarco de Samos (s. III a.C): Propone que la Tierra gira alrededor del Sol. Es poco tenido en cuenta.

Ptolomeo (s. II d.C): Amplía el sistema Geocéntrico para explicar nuevas observaciones. Idea los epiciclos. Este sistema prevalecerá durante 1300 años.

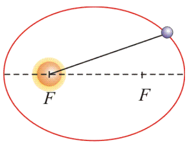
Edad Media: Se mantiene la teoría geocéntrica. El sistema de Ptolomeo se complica cada vez más para poder explicar las observaciones.

Los Matemáticos árabes mejoran la medida de la posición de estrellas y planetas.

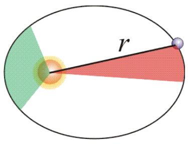
Ed. Moderna: *Copérnico* (1543): Critica el geocentrismo. Propone la Teoría Heliocéntrica. Los planetas (incluida la Tierra) giran alrededor del Sol siguiendo órbitas circulares

Galileo Galilei (s.XVII): Desarrolla el telescopio. Descubre los satélites de Júpiter, las fases de Venus, las manchas solares. Apoya la teoría heliocéntrica de Copérnico.

Kepler (s. XVII): Basándose en las observaciones de Tycho Brahe, apoya la hipótesis de Copérnico, y calcula las órbitas de los planetas, llegando a describirlas en tres leyes (conocidas como *Leyes de Kepler*):



1ª: *Los planetas, incluida la Tierra, giran alrededor del Sol, describiendo órbitas elípticas, en las que el Sol ocupa uno de los focos*.



2ª: (Ley de las áreas): *El vector de posición del planeta barre áreas iguales en tiempos iguales*.

3ª: *El cociente entre el cuadrado del periodo de revolución y el cubo del radio medio de la órbita es una constante para todos los planetas*.

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = cte}$$

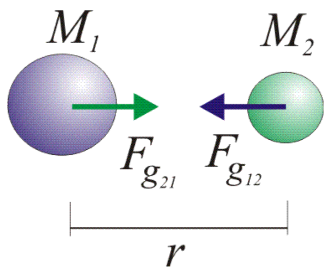
Ley de gravitación universal

Isaac Newton (1684): Explica y describe la interacción gravitatoria, unificando la gravedad terrestre (caída de cuerpos, movimientos parabólicos) y gravedad celeste (movimiento de los planetas y satélites). La explicación de esto queda recogida en la *Ley de gravitación universal*:

"*Entre dos cuerpos cualesquiera, de masas M y m, existe una atracción gravitatoria mutua, que es directamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa*."
Esta ley queda recogida en las siguientes expresiones

En módulo $F_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$

$$\boxed{\vec{F_g} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u_r}}$$

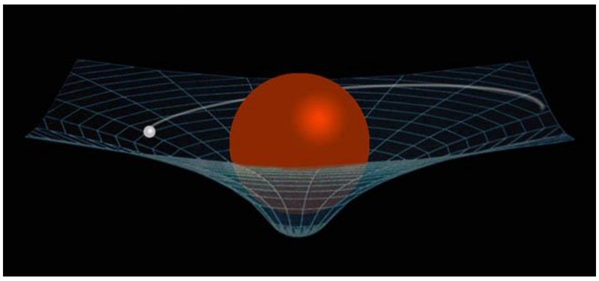


La constante G, denominada constante de gravitación universal, fue calculada por Cavendish en 1798. Tiene el valor de $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

Características de la interacción gravitatoria:

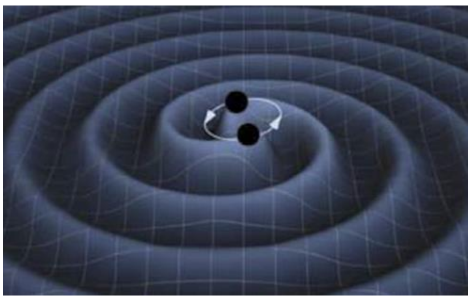
- Es debida a la masa de los cuerpos, por lo que todos los cuerpos materiales sufrirán esta interacción.
- La fuerza originada en esta interacción es siempre atractiva.
- Es una interacción conservativa.
- Es una interacción central.
- Tiene alcance infinito. A cualquier distancia, los dos cuerpos sufrirán la atracción gravitatoria.
- Disminuye con el cuadrado de la distancia

Teoría de la Relatividad General (Einstein, 1915)



$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

La teoría de la gravedad de Newton permite explicar con un gran grado de precisión el movimiento de planetas y satélites, y es la que estudiaremos en el presente tema. Sin embargo, Newton no consigue explicar el hecho de que exista una "acción a distancia" instantánea (es decir, cómo es que la Luna "sabe" que la Tierra la está atrayendo).
Einstein, en 1915, publica su Teoría de la Relatividad General, en la que, entre otras cosas, explica que la masa de los cuerpos deforma el espacio-tiempo a su alrededor, de manera que otro cuerpo que esté a cierta distancia se ve afectado por dicha deformación, y verá modificado su movimiento. Así, la Tierra, en su movimiento alrededor del Sol lo que hace es seguir la curvatura del espacio originada por la enorme masa del Sol. Esta teoría ha sido probada en numerosos casos, como por ejemplo el movimiento anómalo del planeta Mercurio, la desviación de la trayectoria de la luz cuando pasa cerca de una gran masa (estrella, galaxia), lo que da lugar a las "lentes gravitacionales", la variación en la frecuencia de la luz emitida por galaxias y fuentes lejanas (efecto Doppler relativista), la expansión del Universo, la corrección relativista en los satélites de posicionamiento GPS, y la detección de ondas gravitacionales en 2016 por parte del detector LIGO.

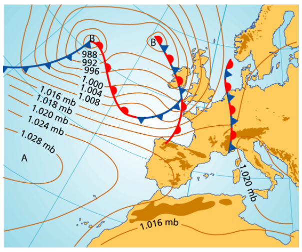


Las ondas gravitacionales han supuesto una de las últimas comprobaciones de predicciones de la Teoría de la Relatividad. La interacción gravitatoria no se transmite a velocidad infinita, sino a la velocidad de la luz, mediante estas ondas. El hecho de que la gravedad sea una fuerza tan extremadamente débil hace que haya sido tan difícil su detección (una oscilación en el espacio-tiempo inferior al tamaño de un protón, originada por la colisión de dos agujeros negros de masas varias decenas de veces la del Sol).

2. Nociones básicas sobre teoría de campos.

Concepto de campo. Campos escalares y vectoriales

El concepto de campo se usa para describir cómo una determinada propiedad está distribuida en el espacio. Matemáticamente, decimos que en una región del espacio hay definido un campo cuando existe una propiedad (escalar o vectorial) que toma un valor para cada punto de dicha zona del espacio. Su valor depende de las coordenadas del punto. $f = f(x,y,z)$



Ejemplos: En la atmósfera, en cada punto tendremos un valor de presión y de temperatura. Tendremos entonces un "campo de presiones" y un "campo de temperaturas", ambos escalares. Si nos fijamos en la velocidad del viento en cada punto, tendremos un campo vectorial de velocidades. Describir cómo estas magnitudes están distribuidas en una zona constituye la base de los mapas meteorológicos.

En un mapa de relieve, la altura de cada punto (cotas de nivel) constituye un campo escalar. Podemos definir, en el mismo mapa, un campo vectorial relacionado con el campo escalar anterior: la pendiente, la inclinación del terreno en cada punto. Ese vector nos indicaría cómo de rápido, y hacia donde, varía la altura al desplazarnos por el mapa.

Superficies equiescalares y líneas de campo:

Son dos formas de representar gráficamente cómo están distribuidas las propiedades en el campo.

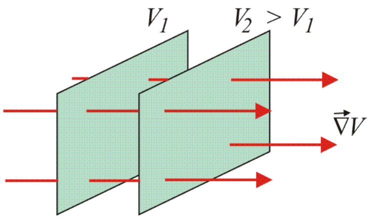
· Las *superficies equiescalares* se definen para campos escalares. Son superficies (si se estudia en 3D) o líneas (2D) formadas por aquellos puntos en los que el valor de la magnitud es el mismo (caso de las cotas de nivel en un mapa de relieve, o las isobaras en el mapa del tiempo).

· Las *líneas de campo* están definidas en campos vectoriales. Son líneas que son tangentes en cada punto al vector campo. Es decir, indican en cada punto hacia dónde (dirección y sentido) va el vector campo. Es el caso de las trayectorias que sigue el viento en un mapa meteorológico, o las "líneas" que se forman si dejamos caer limaduras de hierro cerca de un imán. En el caso de la gravedad, estas líneas muestran hacia dónde "apunta" la fuerza gravitatoria.

Gradiente de un campo escalar.

El gradiente de una magnitud escalar es un vector que indica cómo varía esa magnitud al desplazarnos en las distintas direcciones del espacio (x,y,z). Al reflejar una variación respecto a las variables x,y,z, se calcula mediante derivadas (llamadas "derivadas parciales") respecto a dichas variables.

$$\overrightarrow{grad}V = \vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$



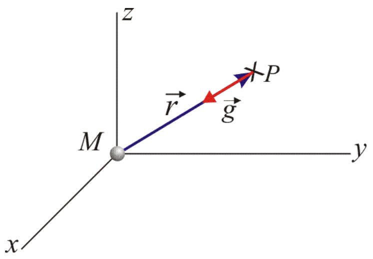
La dirección del vector gradiente:

- Es perpendicular a las superficies equiescalares.
- Indica la dirección y sentido en que la magnitud escalar varía (aumenta) más rápidamente.

Como ejemplo, volvamos al caso del mapa de relieve. Las cotas de nivel marcan las superficies (líneas en este caso) equiescalares. Si nos movemos en cualquier dirección, la altura cambiará más o menos en función de la pendiente del terreno. Precisamente esa pendiente en cada punto se corresponde con el gradiente de la altura. Las líneas de pendiente máxima cortan perpendicularmente (por el camino más corto) las cotas de nivel.

También en la atmósfera los vientos son originados por la variación de presión atmosférica (el gradiente de presión) de un punto a otro. Si la Tierra estuviera en reposo, el aire se movería perpendicularmente a las isobaras desde las zonas de alta presión (A: anticiclón) hasta las de baja presión (B: borrasca). En la práctica, la rotación de la Tierra modifica este movimiento, haciendo que se produzcan remolinos (efecto de Coriolis)

3. Campo gravitatorio.



Supongamos que, en una cierta región del espacio, tenemos un cuerpo con una cierta masa *M*. Debido a esa propiedad, dicho cuerpo interaccionará gravitatoriamente con cualquier otra masa *m* que coloquemos en cualquier punto del espacio. Es decir, la masa *M* modifica las propiedades del espacio, crea una nueva propiedad en el espacio, a la que llamaremos *campo gravitatorio*.

El campo gravitatorio que se establece en la región del espacio que rodea al cuerpo de masa M se describe mediante cuatro magnitudes, dos vectoriales, y dos escalares, que están relacionadas entre sí:

- Vectoriales:
  - Intensidad del campo gravitatorio, $\vec{g}$ (llamado también *campo gravitatorio* o *gravedad*)
  - Fuerza gravitatoria, $\vec{F}_g$
- Escalares:
  - Potencial gravitatorio, *V*.
  - Energía potencial gravitatoria, Ep_g

Fuerza gravitatoria ($\vec{F}_g$):

Cualquier masa *m* (masa de prueba) colocada en cualquier punto del espacio se sentirá atraída por M, sufrirá una fuerza gravitatoria $\vec{F}_g$. Esta fuerza dependerá de las masas *m* y *M*, y del punto del espacio en el que coloquemos *m*. Si las masas son puntuales, o esféricas, podemos calcular la fuerza usando la ley de Gravitación Universal de Newton. En otros casos, hay que estudiar cómo es la distribución de masas.

Intensidad del campo gravitatorio ($\vec{g}$):

Si calculamos la fuerza que se ejercería por cada unidad de masa (por cada kilogramo, en el S.I) que colocáramos en el punto del espacio que estudiamos; entonces obtendremos una magnitud que no depende de la masa *m* que coloquemos en el punto, sino que únicamente depende del punto y de la masa que ha creado el campo (*M*).

Esta magnitud así obtenida se denomina **Intensidad de Campo Gravitatorio**, **Campo Gravitatorio**, o **Gravedad** ($\vec{g}$): Es la fuerza gravitatoria por unidad de masa que se ejerce en un punto afectado por el campo.

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m}} \qquad \boxed{\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}}$$

Unidades de $\vec{g}$: $[g] = N/kg = ms^{-2}$

Es importante recalcar que el campo gravitatorio es una propiedad del espacio (está relacionado con la curvatura del espacio-tiempo que origina la masa *M*, según la Relatividad General). Existe la gravedad en un punto aunque no haya una masa m sobre la que actuar. El valor de la gravedad es independiente del cuerpo *m* sobre el que actúa, sólo depende de quién la ha producido (*M*).

Además de la fuerza ejercida por cada kg, la gravedad nos indica la aceleración con la que caería el cuerpo si lo soltáramos libremente en ese punto.

Las líneas del campo gravitatorio indican, en cada punto, la dirección y sentido de la gravedad (y de la fuerza gravitatoria)

Energía potencial gravitatoria (Ep_g) de una partícula de masa *m* en el interior de un campo gravitatorio:

- Es la energía que almacena un cuerpo de masa *m* colocado en un punto del interior del campo gravitatorio.

- También puede definirse teniendo en cuenta que la fuerza gravitatoria es conservativa. La Ep_g será la energía potencial asociada a la fuerza gravitatoria. Es decir

$$W_{Fg} = -\Delta Ep_g \qquad \Delta Ep_g = -\int_A^B \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$$

Esta energía potencial, como toda energía, se mide en julios, y depende de la masa *m* colocada. Su expresión, la fórmula para calcularla, dependerá en cada caso de qué distribución de masa ha creado el campo, y del origen de potencial escogido.

Potencial gravitatorio (*V*) en un punto del espacio:

- Energía por unidad de masa (por cada kg) que almacenaría cualquier cuerpo que colocáramos en un punto del espacio.

$$\boxed{V = \frac{Ep_g}{m}} \qquad \boxed{Ep_g = m \cdot V} \qquad \textit{Unidades: } [V] = J/kg$$

El potencial V es una propiedad del espacio, que depende sólo del punto y de la masa *M* que lo ha creado. Es independiente de la masa m que coloquemos en el punto. Como ocurre con $\vec{g}$, *V* está definido aunque no haya ninguna masa colocada en el punto.

- También (con un razonamiento similar al de la energía potencial) podemos definir el potencial como *la función potencial asociada al campo gravitatorio.* $\Delta V = -\int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{r}$

Expresándolo de otra forma: El vector intensidad del campo gravitatorio es el gradiente del potencial gravitatorio, con signo opuesto. $\vec{g} = -\vec{\nabla} V = -(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k})$

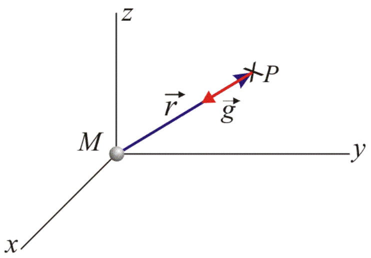
Recordemos que el gradiente de una magnitud escalar indica la dirección y sentido en que la magnitud varía (aumenta) más rápidamente. Por lo tanto, teniendo en cuenta el signo negativo

El campo gravitatorio $\vec{g}$ indica la dirección y sentido en que el potencial gravitatorio V disminuye más rápidamente.

Lo estudiado hasta ahora es general, es válido para cualquier campo que tengamos. A partir de ahora veremos casos particulares. Los resultados que obtendremos sólo se podrán aplicar en un problema si estamos en ese caso particular

Campos creados por distintas distribuciones de masa:

Campo gravitatorio creado por una masa puntual M:



Supongamos una partícula de masa *M*. Crea un campo gravitatorio a su alrededor. Cualquier otra partícula de masa *m* que coloquemos en un punto del espacio, sufrirá una atracción o fuerza gravitatoria.

La **<u>Fuerza gravitatoria</u>** entre ambas partículas vendrá dada por la ley de gravitación Universal de Newton:

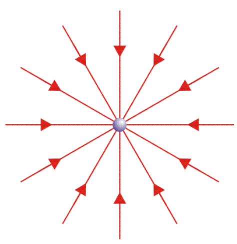
$$\vec{F_g} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u_r} \qquad F_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \qquad \text{(Módulo > 0)}$$

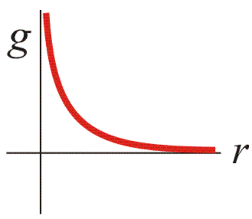
<u>Campo gravitatorio</u> $\vec{g}$:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\,\vec{u}_r \qquad g = \frac{GM}{r^2}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F_g}}{m} = \frac{-G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^2 \cdot \cancel{m}} \cdot \vec{u_r} = \frac{-G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u_r}$$

Líneas de campo:





Representación frente a la distancia

<u>Energía potencial gravitatoria</u>: Energía almacenada por una partícula de masa *m* colocada a una cierta distancia de M, debido a la acción de la fuerza gravitatoria.

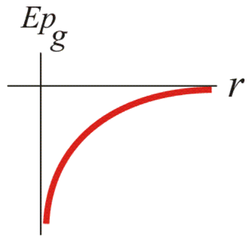
Partimos de la expresión general $\Delta Ep_g = -W_{Fg}$ Así tendremos:

$$\Delta Ep_g = -\int_A^B \vec{F}_g \cdot \vec{dr} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{-G\cdot M\cdot m}{r^2}\cdot \vec{u}_r \cdot dr \cdot \vec{u}_r = G\cdot M\cdot m\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}\cdot dr = G\cdot M\cdot m\cdot\left[-\frac{1}{r}\right]_{rA}^{rB} =$$

$$= \frac{-G\cdot M\cdot m}{r_B} + \frac{G\cdot M\cdot m}{r_A} = Ep_B - Ep_A$$

Elegimos origen . Para $r_A \rightarrow \infty$, $Ep_A = 0$.

Y la expresión queda $\boxed{Ep_g = -G\cdot\frac{M\cdot m}{r}}$



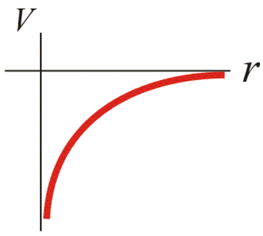
Como vemos, la Ep_g almacenada <u>siempre</u> será negativa, teniendo en cuenta el origen escogido en $r\rightarrow\infty$.

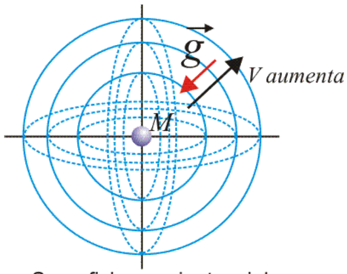
<u>Potencial gravitatorio en un punto</u>: Energía potencial gravitatoria almacenada por unidad de masa

$$V = \frac{Ep_g}{m} = -G\cdot\frac{M\cdot \cancel{m}}{r\cdot \cancel{m}}$$

$$\boxed{V = -G\cdot\frac{M}{r}}$$

Origen de potencial en $r\rightarrow\infty$

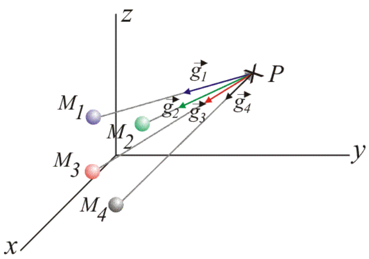




Superficies equipotenciales

Las superficies equipotenciales son esferas concéntricas (perpendiculares al vector campo)

Campo gravitatorio creado por varias masas puntuales:



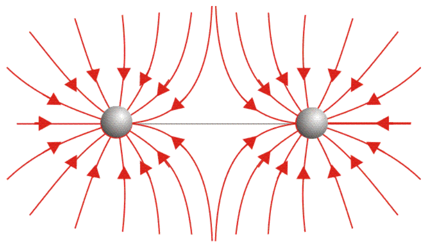
En este caso aplicamos el *principio de superposición* (el efecto producido por un conjunto de partículas puede calcularse sumando los efectos de cada partícula por separado). Así

$$\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots$$

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \ldots$$

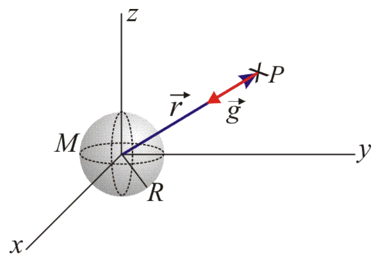
$$Ep_g = Ep_1 + Ep_2 + Ep_3 + \ldots$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots$$



Líneas de campo gravitatorio generado por dos masas puntuales iguales.

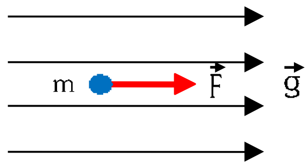
Campo gravitatorio creado por una esfera en su exterior (como la Tierra o cualquier planeta):



Son válidos los resultados obtenidos para masas puntuales.
Lo demostraremos en el apartado siguiente.

M es la masa total de la esfera y *r* la distancia al centro de la misma

Campo gravitatorio constante (p.e. la gravedad a nivel de la superficie)**:**



En este caso sólo podemos usar los resultados generales vistos al principio.

$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$ $\qquad \Delta Ep_g = m \cdot \Delta V = -W_{Fg}$

$W_{Fg} = \int_A^B \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r}$ $\qquad \Delta V = -\int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{r} = -\vec{g} \cdot \Delta\vec{r}$

4. Movimiento de una partícula dentro de un campo gravitatorio

Supongamos una partícula de masa *m* que se mueve influenciada únicamente por la fuerza gravitatoria. La aceleración que sufrirá la partícula será igual a la gravedad, la intensidad del campo gravitatorio.

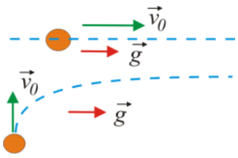
$\vec{a} = \frac{\vec{F}_g}{m} = \frac{\cancel{m} \cdot \vec{g}}{\cancel{m}} = \vec{g}$ La aceleración no depende de la masa *m* de la partícula.

Según las características del campo gravitatorio, la trayectoria que seguirá la partícula será una u otra.

Campo gravitatorio constante:

La fuerza gravitatoria es constante y la aceleración también lo será. Se trata, por tanto, de un Movimiento Uniformemente Acelerado (MUA), con dos trayectorias posibles:

- Rectilínea, si inicialmente { En reposo ($\vec{v}_0 = 0$) / Velocidad inicial es paralela a las líneas de campo ($\vec{v}_0 \parallel \vec{g}$)
- Parabólica, si inicialmente $\vec{v}_0$ no es paralela a las líneas de campo.

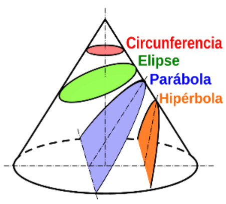


Campo gravitatorio producido por una masa *M* puntual (o una esfera en su exterior):

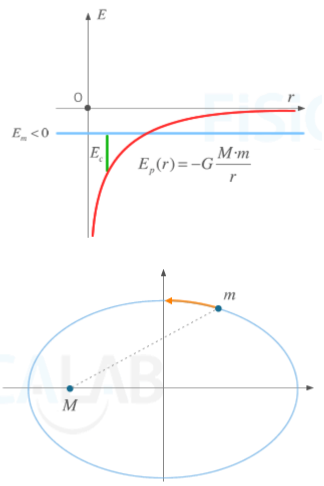
En este caso la fuerza gravitatoria es central, apunta hacia *M* (o hacia el centro de la esfera).

- Si inicialmente está { En reposo ($\vec{v}_0 = 0$): / Moviéndose con $\vec{v}_0 \parallel \vec{g}$ } La trayectoria será rectilínea

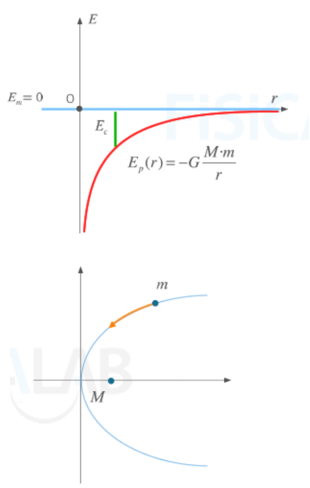
- Si la velocidad $\vec{v}_0$ no es paralela a $\vec{g}$ → Trayectoria curva. La trayectoria que sigue es una cónica (circunferencia, elipse, parábola, hipérbola). El que siga una u otra dependerá de la energía mecánica total de la partícula $E_M = Ec + Ep_g$



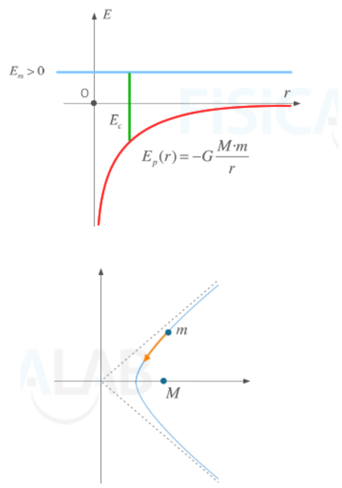
$E_M < 0$ ($Ec < \lvert Epg \rvert$)	$E_M = 0$ ($Ec = \lvert Epg \rvert$)	$E_M > 0$ ($Ec > \lvert Epg \rvert$)
Estado ligado	No ligado (escape)	No ligado (escape)



Elipse (o circunferencia)



Parábola



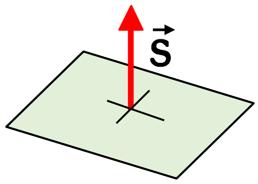
Hipérbola

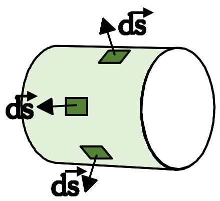
Campo gravitatorio producido por varias masas:
En este caso el cálculo de la trayectoria se vuelve complejo. E incluso puede no tener una solución exacta, puesto que hay que tener en cuenta el movimiento de las masas que crean el campo debido a la interacción entre las mismas. (Ver Anexo *El problema de tres cuerpos*)

5. Teorema de Gauss. Aplicación al cálculo de campos gravitatorios

Vector superficie: La forma que tenemos en Física y en geometría de representar las superficies mediante una magnitud es usar el vector superficie ($\vec{s}$). Este vector tiene como características:

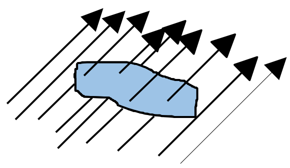
- Su dirección es perpendicular a la superficie
- Su módulo es igual al área.
- El sentido puede elegirse. Cuando una superficie es cerrada, normalmente va hacia fuera de la misma.





Cuando una superficie no es plana, vemos que no existe un único vector superficie, ya que este va cambiando de dirección. Se procede entonces a dividir la superficie en trozos infinitamente pequeños, a cada uno de los cuales corresponde un vector superficie $d\vec{s}$.

Flujo del campo gravitatorio (Φ_g):



El concepto de flujo nos da una idea de la concentración de líneas de campo en una zona del espacio. Es otra forma de medir lo intenso que es el campo en ese sitio.
Supongamos una superficie cualquiera dentro del campo gravitatorio. Habrá líneas de campo que la atravesarán, otras no. El flujo nos va a indicar si dicha superficie es atravesada con más o menos intensidad por las líneas de campo.
Esta magnitud dependerá de:
- La intensidad del campo en la zona (el valor de $\vec{g}$).
- El tamaño y forma de la superficie
- La orientación entre la superficie y el campo.

Estas tres características quedan recogidas en la expresión que calcula el flujo que atraviesa una determinada superficie. $\Phi_g = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{s}$ Unidades de flujo gravitatorio $[\Phi_g] = m\, s^{-2} \cdot m^2 = m^3 \cdot s^{-2}$

En el caso de que el campo gravitatorio sea uniforme (que tenga el mismo valor en todos los puntos de la superficie), $\vec{g}$ puede salir fuera de la integral, con lo que el flujo quedará $\Phi_g = \vec{g} \cdot \int_S d\vec{s} = \vec{g} \cdot \vec{S} = g \cdot S \cdot \cos\alpha$

Ejemplo. Cálculo del flujo que atraviesa una superficie esférica (la masa M que crea el campo se encuentra en el centro de dicha superficie).

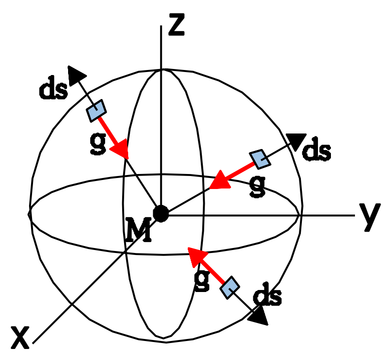
Sabemos la expresión del campo gravitatorio creado por una masa puntual. $\vec{g} = \frac{-G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u_r}$

$\vec{g}$ tiene dirección radial y sentido hacia la partícula *M*. En la figura vemos que forma 180º con el vector superficie $d\vec{s}$. Así, el flujo se calculará:

$$\Phi_g = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_S g \cdot ds \cdot \cos 180^o = -\int_S g \cdot ds$$

Como g se mantiene constante en toda la superficie, podemos sacarlo fuera de la integral

$$\Phi_g = -\int_S g \cdot ds = -g \cdot \int_S ds = -g \cdot S = -\frac{G \cdot M}{r^2} \cdot 4\pi \cdot r^2 = -4\pi \cdot G \cdot M$$



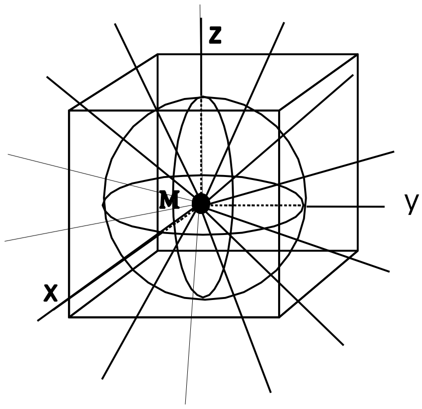
Teorema de Gauss:

El teorema de Gauss aplicado al campo gravitatorio nos dice lo siguiente:

El flujo total que atraviesa una superficie <u>cerrada</u> en el interior de un campo gravitatorio es proporcional a la masa encerrada por dicha superficie.

$$\Phi_g = \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{s} = -4\pi \cdot G \cdot M$$

Según la expresión, vemos que el flujo no depende de la forma ni el tamaño de la superficie, siempre que sea cerrada y encierre la misma cantidad de masa.



El flujo de líneas de campo que atraviesa ambas superficies cerradas es el mismo

Cuestión: ¿Qué ocurre si la superficie cerrada no contiene en su interior ninguna masa?

<u>APLICACIONES:</u>

El teorema de Gauss permite calcular la expresión del campo gravitatorio creado por algunas distribuciones de masa. Deben ser cuerpos que posean cierta simetría (esférica, cilíndrica, plana), en los que podamos tener una idea de la dirección que llevarán las líneas de campo en cada punto.

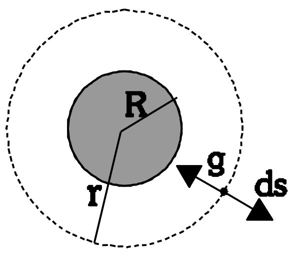
El objetivo que se persigue al aplicar el teorema de Gauss es el de poder despejar g de la fórmula $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{s} = -4\pi \cdot G \cdot M$. Para ello, para que g salga fuera de la integral, es preciso que g tenga un valor constante en toda la superficie y que además sea perpendicular a la misma. Así:

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{s} = \oint_S g \cdot ds \cdot cos\,180^o = -g \cdot \oint_S ds = -g \cdot S = -4\pi \cdot G \cdot M \quad \rightarrow \quad g = \frac{4\pi \cdot G \cdot M}{S}$$

Donde S es el valor de la superficie (llamada *superficie gaussiana*) utilizada, y M es la masa que queda encerrada dentro de la superficie gaussiana. Lo veremos en los casos que se exponen a continuación:

Cálculo de g creado por una esfera en su exterior:

El cuerpo que va a crear el campo tiene simetría esférica. Sabemos que las líneas de campo irán en dirección radial y que el valor del campo dependerá exclusivamente de la distancia al centro de la esfera. La superficie gaussiana que andamos buscando debe ser perpendicular a las líneas de campo y mantener constante el valor de g en todos sus puntos: es claramente una esfera de radio r cualquiera (siempre mayor que el radio R de la esfera).



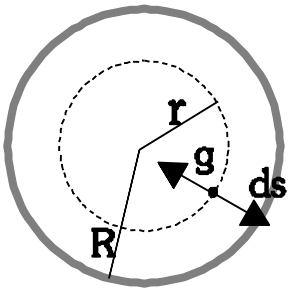
Aplicando el teorema de Gauss al campo que atraviesa dicha superficie:

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{s} = \oint_S g \cdot ds \cdot cos180^o = -g \cdot \oint_S ds = -g \cdot S = -g \cdot 4\pi \cdot r^2 = -4\pi \cdot G \cdot M$$

$$\rightarrow \quad g = \frac{-4\pi \cdot G \cdot M}{-4\pi \cdot r^2} = \frac{G \cdot M}{r^2}$$

de este modo $g = \frac{G \cdot M}{r^2}$, que es la expresión que habíamos visto anteriormente.

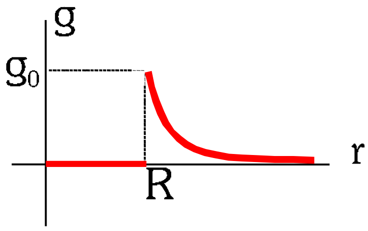
Cálculo de g creado por una esfera hueca en su interior:



Supongamos una esfera hueca, vacía en su interior, con su masa M concentrada en la superficie (en la "cáscara").
El cuerpo tiene simetría esférica y las líneas de campo van a llevar, por tanto, dirección radial. Como ocurría anteriormente, la superficie gaussiana que usaremos será una esfera de radio *r* (menor que R, en este caso). Aplicamos el teorema de Gauss a esa esfera:

$$\oint_S \vec{g}\cdot d\vec{s} = \oint_S g\cdot ds\cdot cos180^o = -g\cdot\oint_S ds = -g\cdot S = -g\cdot 4\pi\cdot r^2 = -4\pi\cdot G\cdot M_{int}$$

$$\rightarrow \quad g = \frac{-4\pi\cdot G\cdot M_{int}}{-4\pi\cdot r^2} = \frac{G\cdot M_{int}}{r^2}$$

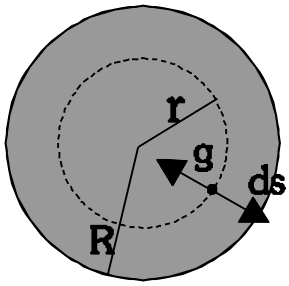


Pero vemos que dentro de la esfera gaussiana de radio r no hay masa, está vacía: $M_{int} = 0$.

Por lo tanto, el campo gravitatorio en cualquier punto del interior de la esfera hueca es nulo ($g_{int} = 0$)

Aunque no se trate de una situación real, este caso responde a la elucubración de "Si la Tierra estuviera hueca, ¿cómo sería estar en el interior de la Tierra?" Pues en el interior un cuerpo estaría en ingravidez, flotando y moviéndose con MRU.

Cálculo de g creado por una esfera maciza en su interior:



La expresión que vamos a calcular ahora es útil a la hora de estudiar cómo varía el campo gravitatorio en el interior de la Tierra o de un planeta. Vamos a suponer que la distribución de masa dentro de la esfera es uniforme (cosa que no siempre ocurre, en un planeta la densidad es mayor en el centro, debido a la presión).
El cuerpo tiene simetría esférica y las líneas de campo van a llevar, por tanto, dirección radial. Como ocurría anteriormente, la superficie gaussiana que usaremos será una esfera de radio *r* (menor que R, en este caso). Aplicamos el teorema de Gauss a esa esfera:

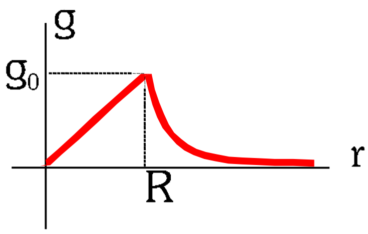
$$\oint_S \vec{g}\cdot d\vec{s} = \oint_S g\cdot ds\cdot cos180^o = -g\cdot\oint_S ds = -g\cdot S = -g\cdot 4\pi\cdot r^2 = -4\pi\cdot G\cdot M_{int}$$

$$\rightarrow \quad g = \frac{-4\pi\cdot G\cdot M_{int}}{-4\pi\cdot r^2} = \frac{G\cdot M_{int}}{r^2}$$

Ahora, la masa encerrada por la esfera gaussiana no es toda la masa del cuerpo, sino sólo una parte. La calculamos:

$$M_{int} = \rho\cdot V_{int} = \frac{M_{tot}}{V_{tot}}\cdot V_{int} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\cdot R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot r^3 = \frac{M\cdot r^3}{R^3}$$

Entonces $$g = \frac{G\cdot M_{int}}{r^2} = \frac{G\cdot M\cdot r^3}{r^2\cdot R^3} \quad\Rightarrow\quad g = \frac{G\cdot M\cdot r}{R^3}$$



Vemos que, en el interior, g disminuye conforme profundizamos, hasta hacerse cero en el centro de la esfera.

6. Campo gravitatorio terrestre

Para estudiar el campo gravitatorio creado por la Tierra (o cualquier planeta) en su exterior, consideraremos al planeta como una esfera perfecta y homogénea, de masa M y radio R. De esta forma podremos aplicar los resultados que ya tenemos sobre distribuciones esféricas de masa (que ya vimos que se comportaban como masas puntuales).
Así, tanto el campo gravitatorio como el potencial gravitatorio en cualquier punto del exterior vendrán dados por

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2} \qquad V = -G \cdot \frac{M}{r} \qquad \textit{Para } r > R$$

Para la Tierra: $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg $R = 6370$ km $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m *(radio medio)*

Campo gravitatorio en la superficie (gravedad superficial, g_0)

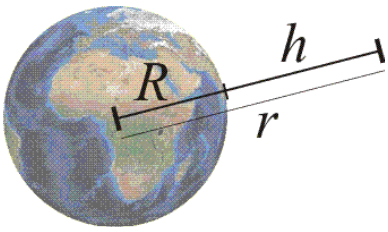
Este valor se obtendrá teniendo en cuenta que, en la superficie del planeta, $r = R$.

$$g_0 = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

Para la Tierra, obtenemos el valor de $g_0 = 9{,}8 \ ms^{-2}$

Este valor obtenido es, en teoría, la gravedad justo al nivel del suelo, ya que el valor de g disminuye conforme nos alejamos del centro de la Tierra, aunque sea un solo metro.

Vamos a ver cómo varía g respecto a la altura desde el suelo (h). $r = R + h$



Así $g = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{(R+h)^2}$ Vemos que g disminuye con la altura

Si la altura es muy pequeña comparada con el radio del planeta $h << R \rightarrow R+h \sim R$

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2} \sim \frac{GM}{R^2} = g_0 \quad \rightarrow \quad g \sim g_0$$

Vemos que la gravedad disminuye con la altura, pero podemos considerar que g se mantiene aproximadamente constante ($g \sim g_0$) si el valor de h es mucho menor que el radio del planeta ($h << R$).

Energía potencial gravitatoria en la superficie terrestre. Relación entre las expresiones de Epg

Hemos visto que la expresión de la energía potencial gravitatoria es $Ep_g = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$

Sin embargo, en el tema anterior usamos la expresión $Ep_g = m \cdot g \cdot h$

¿Por qué son tan diferentes estas dos expresiones? ¿Son las dos igualmente válidas? La razón de la diferencia está en un hecho muy simple pero que puede pasar desapercibido: para cada una se ha escogido un origen de potencial diferente. En la primera expresión el origen se encuentra en el ∞, y en la segunda expresión, el origen está escogido en la superficie terrestre.

Podemos comprobar que, si en el cálculo de la *Epg*, en lugar de poner el origen en el infinito, lo colocamos en la superficie, y hacemos una aproximación, obtendremos la segunda expresión.

Habíamos obtenido $$Ep_{gB} - Ep_{gA} = -\int_A^B \vec{F_g} \cdot \vec{dr} = \frac{-G \cdot M \cdot m}{r_B} + \frac{G \cdot M \cdot m}{r_A}$$

Escogiendo origen
$r_A = R$; $Ep_A = 0$

$$Ep_g = -GMm\left[\tfrac{1}{r} - \tfrac{1}{R}\right] = \ldots = GMm \frac{h}{R \cdot (R+h)}$$

Realizamos la aproximación
$h << R \quad ; \quad R+h \sim R$

$$Ep_g \sim \frac{G \cdot M \cdot m \cdot h}{R^2} = m \cdot \frac{G \cdot M}{R^2} \cdot h = m \cdot g_0 \cdot h$$

Hay que tener en cuenta que para llegar a la expresión $Ep_g = m \cdot g_0 \cdot h$, hemos tenido que suponer que la altura a la que nos encontramos es muy pequeña comparada con el radio del planeta (unas 100 veces menor, al menos). Por tanto, la expresión sólo será válida cuando se cumpla esta condición. Para el caso de la Tierra, podemos considerar que la gravedad se mantiene constante hasta una altura de 50 - 60 km aproximadamente.

Velocidad de escape de un planeta: (v_e)

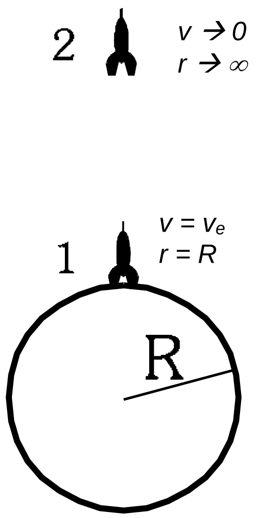
Se define como la velocidad mínima a la que habría que lanzar un cuerpo desde la superficie del planeta para que escapara de su atracción gravitatoria, alejándose indefinidamente. En este cálculo se desprecia el rozamiento con la atmósfera.

En primer lugar tenemos en cuenta que, al no tener en cuenta el rozamiento, la única fuerza que va a actuar sobre el movimiento del cohete será la gravitatoria, que es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica del cohete se mantendrá constante.

Datos: M, R: masa y radio del planeta
m: masa del proyectil

Sistemas de referencia: mediremos las distancias desde el centro del planeta.

El origen de energía potencial gravitatoria lo colocamos a una distancia infinita del centro planetario, por lo que la expresión usada para la Epg será $Ep_g = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$



Consideraremos dos situaciones:

Inicial: Lanzamiento del cohete desde la superficie terrestre con velocidad v_e.

$$E_{M1} = Ec + Ep_g = \tfrac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

Final: el cohete se aleja indefinidamente. En el límite cuando la distancia r tiende a infinito, la velocidad (y la Ec) tiende a cero, al igual que la energía potencial, ya que el origen de Ep está colocado en el infinito.

$$E_{M2} = \lim_{r \to \infty} E_M = \lim_{r \to \infty} (Ec + Ep_g) = 0$$

Aplicando la conservación de la energía mecánica:

$$E_{M2} = E_{M1} \Rightarrow \tfrac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2} \cancel{m} v_e^2 = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{R} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

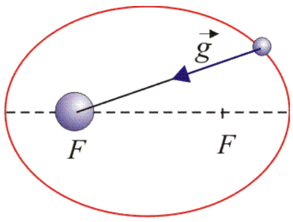
$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Puesto en función de la gravedad en superficie $v_e = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R}$

Nótese que la velocidad de escape desde la superficie de un planeta sólo depende de las características (masa, tamaño) del planeta. No importa la masa del proyectil. (Evidentemente, para acelerar un proyectil de más masa hasta esa velocidad se necesitará un mayor esfuerzo, pero eso es otra cuestión)

También puede hablarse de velocidad de escape desde una cierta altura *h* sobre la superficie. El concepto es el mismo, solo que en lugar de *R* pondremos *R+h*. $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}$

7. Movimiento de satélites.



Por satélite entenderemos cualquier cuerpo (natural o artificial) que describa órbitas alrededor de un cuerpo celeste debido a la acción de la gravedad. Así, la Luna, o la estación espacial internacional (ISS), son satélites de la Tierra, y la Tierra es satélite del Sol.

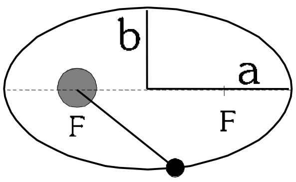
Kepler comprobó y Newton demostró que la órbita que describe un satélite tiene forma elíptica. La distancia a la que se encuentra del centro del planeta no es constante, ni tampoco su velocidad. Sin embargo sí hay dos magnitudes que se mantendrán constantes en toda la trayectoria:

- Su momento angular respecto al planeta (su tendencia a mantener el movimiento de giro): $\vec{L}_0 = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$

- Su energía mecánica $E_M = Ec + Ep_g = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GMm}{r}$

Esto hace que la posición y la velocidad del satélite en la órbita estén relacionadas. Para una posición concreta, el satélite tendrá una velocidad concreta. En los puntos más alejados de la órbita (*r* mayor), la *Epg* almacenada será mayor, por lo que la *Ec* será menor, y la velocidad también disminuirá. De la misma forma, al ir acercándose al planeta, su *Epg* disminuirá, produciendo un aumento de la *Ec* y, por tanto, de la velocidad (2ª ley de Kepler)

Semiejes y excentricidad de la órbita:



Toda elipse viene caracterizada, además de por los focos, por dos distancias llamadas *semiejes*, *a* y *b* (en la figura). Estas dos distancias sirven para calcular la *excentricidad (e)*, magnitud que nos indica el achatamiento de la elipse, es decir, cuánto se aleja la elipse de una circunferencia perfecta.

Para una elipse $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ $e < 1$

En una circunferencia, $a = b$, con lo que $e = 0$. Cuanto menor sea la excentricidad, más parecida es la órbita a una circunferencia. Para el caso de los planetas alrededor del Sol, las excentricidades son muy pequeñas (la de la Tierra, por ejemplo, es de 0,017). Los cometas tienen excentricidades muy altas (0,967 el cometa Halley)
La longitud del semieje *a* coincide con el radio medio de la órbita.

Puntos de máxima y mínima distancia:

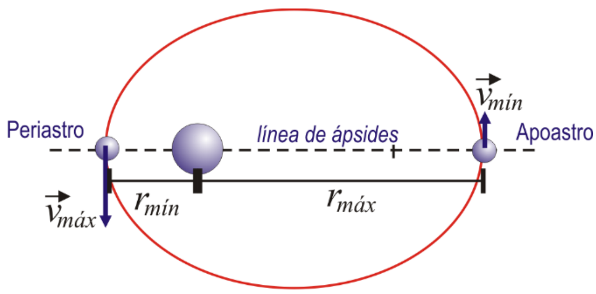
Los puntos de máximo acercamiento y máximo alejamiento del satélite al cuerpo central reciben nombres propios:
Periastro (máximo acercamiento): distancia mínima, velocidad máxima (*perigeo* para la Tierra, *perihelio* para el Sol).
Apoastro (máximo alejamiento): distancia máxima, velocidad mínima (*apogeo* para la Tierra, *afelio* para el Sol).

- En ambos puntos la velocidad es perpendicular al radio.

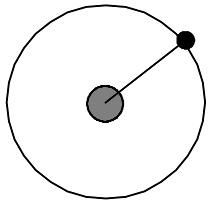
- La línea que une ambos puntos se llama *línea de ápsides*. Pasa por el astro central.

- La distancia entre estos puntos es igual al eje mayor de la órbita ($2 \cdot a$)

$$r_{máx} + r_{mín} = 2 \cdot a$$



Estudio de satélites con trayectoria circular:



Hasta aquí lo que podemos estudiar en este curso sobre las trayectorias elípticas. Para continuar un estudio aproximado, haremos una simplificación razonable. En la mayoría de los casos la excentricidad de la elipse es tan pequeña que podemos suponer, en el estudio elemental que estamos realizando, que se trata de una circunferencia. Es decir, consideraremos que un satélite describe, alrededor del planeta, un *movimiento circular uniforme*. Es decir, tanto el radio de la órbita como la velocidad se mantendrán constantes en toda la trayectoria.

Velocidad orbital: (v_{orb}) Es la velocidad que debemos imprimir al satélite, en dirección perpendicular a r, para que describa una órbita circular a esa distancia. Para calcularla, tendremos en cuenta que la única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria.

$$F_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

También, al tratarse de un movimiento circular, sólo tendrá aceleración normal. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F_g = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Igualando ambas expresiones: $$\frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Observamos que, a cada órbita corresponde una velocidad determinada, y no depende de la masa del satélite.

Periodo de revolución (T): Tiempo que tarda el satélite en describir una órbita completa (en dar una vuelta). Dado que se trata de un movimiento uniforme, podemos calcular este tiempo dividiendo la distancia recorrida (una vuelta = $2 \cdot \pi \cdot r$) entre la velocidad que lleva (v_{orb}). Así

$$T = \frac{d}{v_{orb}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \cdot r^{\frac{3}{2}}$$

De este resultado podemos extraer importantes consecuencias:
- A cada órbita (radio) corresponde un periodo de revolución concreto
- Elevando al cuadrado y despejando... $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot r^3 \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = cte$ 3ª ley de Kepler.

Energía mecánica del satélite en una órbita circular:

Ya habíamos visto que, en el caso general de una órbita elíptica, la energía mecánica del satélite se calcula:

$$E_M = Ec + Ep_g = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Sabemos que para una órbita circular, la velocidad es constante (velocidad orbital). Así.

$$E_M = Ec + Ep_g = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{GM}{r}} \right)^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

Momento angular:

La tendencia a girar del satélite permanece constante: Como la velocidad es perpendicular al radio en todo momento:

$\vec{L}_0 = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$ en módulo $L_0 = r \cdot m \cdot v_{orb} \cdot sen90º = r \cdot m \cdot v_{orb} = cte$

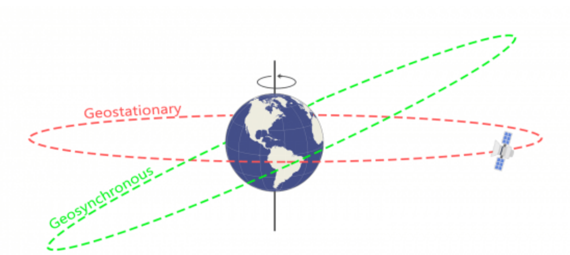
Clasificación de los satélites artificiales en función de su órbita

Podemos clasificar los satélites artificiales que describen órbitas en torno a la Tierra según el radio de la órbita (o lo que es equivalente, la altura a la que se encuentran sobre la superficie terrestre). Así, tendremos:

Órbita	Radio	Altura	T	v_{orb}	Aplicaciones
LEO (órbita baja)	6530 km – 8470 km	160 km – 2000 km	88 min – 2 h	7,8 km/s – 6,9 km/s	ISS, Meteorología. Telescopios espaciales
MEO (órbita media)	8470 km – 42149 km	2000 km – 35779 km	2 h – 1 día	6,9 km/s – 3,07 km/s	GPS, Meteorología
GEO	42149 km	35779 km	1 día sidéreo (23 h 56 min)	3,07 km/s	Telecomunicaciones
HEO (órbita alta)	> 42149 km	> 36000 km	> 1 día	< 3,07 km/s	Cementerio satelital (h = 36200 km)

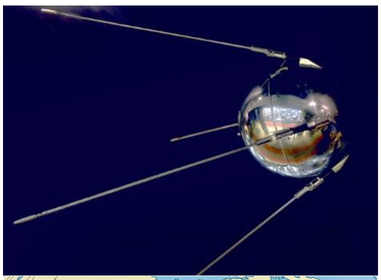
Satélites geosíncronos y geoestacionarios:

Un satélite *geosíncrono* tiene un periodo de revolución igual a un día sidéreo (23h 56 min, que en las cuestiones redondearemos a 24 horas), el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta sobre su eje. Por lo tanto, su órbita tiene un radio de 42149 km (35779 km de altura sobre la superficie, más de 5 veces el radio terrestre), una distancia muy grande comparada con la altura que alcanzan los llamados "satélites de órbita baja", entre 160 y 2000 km sobre la superficie. La inclinación de la órbita de un satélite geosíncrono puede ser cualquiera, entre ecuatorial y circumpolar (pasa por encima de los polos).



Un satélite *geoestacionario* es un satélite geosíncrono en órbita ecuatorial. De este modo, al orbitar con la misma velocidad angular que la Tierra, siempre está en la vertical del mismo punto del ecuador terrestre. Parece como si estuviera quieto respecto a nosotros. En esto estriba su utilidad, ya que podemos apuntar hacia él permanentemente una antena parabólica. Son usados en telecomunicaciones. Existe una única órbita geoestacionaria, compartida por todos estos satélites.

"Cementerios" de satélites:



Desde que la URSS lanzara el *Sputnik I* en octubre de 1957, se han lanzado unos 5000 satélites al espacio. Aproximadamente 2600 han superado su vida útil (unos 15-20 años) y ya no se usan, pero siguen orbitando la Tierra. Al principio estos satélites se dejaban en su órbita, con los consiguientes riesgos de saturación de la órbita, desviación de la trayectoria por falta de correcciones periódicas de mantenimiento, o pérdida de piezas por choques con micrometeoritos. Se le denomina "basura espacial". Actualmente, los satélites deben conservar parte de su combustible tras su vida útil, y son dirigidos, bien a una órbita superior en el caso de satélites geoestacionarios (unos 200 km por encima de la órbita geoestacionaria), o son dejados caer de forma controlada hasta que la fricción con la atmósfera terrestre termina desintegrándolos. Existe una zona del Pacífico Sur, deshabitada y fuera de zonas de tráfico aéreo y marítimo, llamada "cementerio de satélites" o "punto Nemo", donde caen los restos más grandes que no se han desintegrado en la atmósfera.

PROBLEMAS TEMA 3: INTERACCIÓN GRAVITATORIA:

1. La tabla adjunta relaciona el periodo T y el radio de las órbitas de cinco satélites que giran alrededor del mismo astro:

T (años)	0,44	1,61	3,88	7,89
R ($\cdot 10^5$ km)	0,88	2,08	3,74	6,00

a) Mostrar si se cumple la tercera ley de Kepler. ¿Cuál es el valor de la constante?
b) Se descubre un quinto satélite, cuyo periodo de revolución es 6,20 años. Calcula el radio de su órbita.

2. Una masa de 8 kg está situada en el origen. Calcular: (Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})
a) Intensidad del campo gravitatorio y potencial gravitatorio en el punto (2,1) m.
b) Fuerza con que atraería a una masa m de 2 kg, y energía almacenada por dicha masa.
c) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar la masa m desde el punto (2,1) m al punto (1,1) m

3. Dos masas de 5 kg se encuentran en los puntos (0,2)m y (2,0) m. Calcular: (Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})
a) Intensidad de campo gravitatorio y potencial gravitatorio en el origen.
b) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar una masa de 1 kg desde el infinito hasta el origen.

4.- a) ¿En qué punto se equilibran las atracciones que ejercen la Luna y La Tierra sobre un cuerpo de masa m? (Datos: distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna = 384400 km; $M_T / M_L = 81$)
b) Si en dicho punto la atracción gravitatoria que sufre la masa m es nula, ¿podemos decir también que su energía potencial también es nula? Razonar.

5.- Un objeto que pesa 686 N en la superficie de la Tierra, se encuentra en la superficie de un planeta cuyo radio es el doble del terrestre y cuya masa es ocho veces la de la Tierra. Calcule razonadamente: (Dato: $g_{0T} = 9{,}8$ N/kg)
a) Peso del objeto en dicho lugar
b) Velocidad con la que llega al suelo, si se deja caer desde 20 m de altura sobre la superficie del planeta.

6.- Calcular: a) Altura sobre la superficie terrestre en la que el valor de g se ha reducido a la mitad
b) Potencial gravitatorio en un punto situado a 6370 km de distancia de la superficie terrestre.
(Datos: R_T= 6370 km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2} ; $g_{0T} = 9{,}8$ N/kg)

7.- Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad de 5 km/s. Calcular, despreciando el rozamiento con la atmósfera:
a) Altura máxima que alcanzará.
b) Repetir lo anterior despreciando la variación de g con la altura. Comparar ambos resultados.
(Datos: R_T= 6370 km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2} ; $g_{0T} = 9{,}8$ N/kg)

8.- Calcular la velocidad de escape para un cuerpo situado en:
a) La superficie terrestre b) A 2000 km sobre la superficie
(Datos: Masa de la Tierra = $6 \cdot 10^{24}$ kg ; R_T= 6370 km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})

9.- Un satélite artificial describe una órbita circular a una altura igual a tres radios terrestres sobre la superficie de la Tierra. Calcular: a) Velocidad orbital del satélite b) Aceleración del satélite
(Datos: Masa de la Tierra = $6 \cdot 10^{24}$ kg ; R_T= 6370 km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})

10.- a) ¿Cuál será la altura que alcanzará un proyectil que se lanza verticalmente desde el Sol a 720 km/h.?
b)¿Cuántas veces es mayor el peso de un cuerpo en el Sol que en la Tierra?
(M_{SOL}/M_{TIERRA}= 324440 ; R_S/R_T= 108 ; R_T= 6370 km ; $g_{0T} = 9{,}8$ N/kg ; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})

11.- Si la gravedad en la superficie lunar es aproximadamente 1/6 de la terrestre, calcular la velocidad de escape de la Luna ¿En qué medida importa la dirección de la velocidad?
(R_{LUNA}= 1740 km ¸ $g_{0T} = 9{,}8$ N/kg)

12.- El planeta Marte tiene un radio $R_M = 0{,}53\ R_T$. Su satélite Fobos describe una órbita casi circular de radio igual a 2,77 veces R_M , en un tiempo de 7 h 39' 14''. Calcula el valor de g en la superficie de Marte.
(R_T= 6370 km ; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})

13.- Calcular la aceleración respecto al Sol de la Tierra si el radio de la órbita es $1{,}5\cdot10^{8}$ km de radio. Deducir la masa del Sol (datos $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})

14.- Calcular:
a) Trabajo que hay que realizar para trasladar un cuerpo de 20 kg desde la superficie terrestre hasta una altura igual al radio de la Tierra.
b) Velocidad a la que habría que lanzarlo para que alcanzara dicha altura
($M_T = 6\cdot10^{24}$ kg ; R_T= 6370 km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})

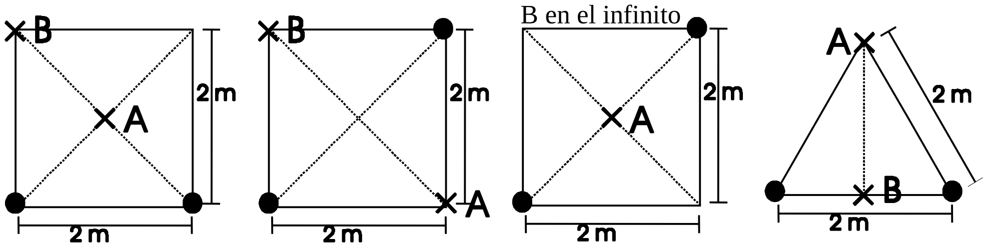
15. Un satélite de comunicaciones está situado en órbita geoestacionaria circular. Calcule:
a) Radio de la trayectoria, aceleración tangencial del satélite y trabajo realizado por la fuerza gravitatoria durante un periodo.
b) Campo gravitatorio y aceleración de la gravedad en cualquier punto de la órbita.
($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2} $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg)

16. Un satélite describe una órbita circular de radio 2 R_T en torno a la Tierra.
a) Determine su velocidad orbital.
b) Si el satélite pesa 5000 N en la superficie terrestre, ¿cuál será su peso en la órbita?
(R_T = 6400 km ; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})

17. Un satélite describe una órbita en torno a la Tierra con un periodo de revolución igual al terrestre.
a) Explique cuántas órbitas son posibles y calcule su radio.
b) Determine la relación entre la velocidad de escape en un punto de la superficie terrestre y la velocidad orbital del satélite.
(R_T = 6400 km ; g_T = 10 m s^{-2} ; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})

18. La masa de la Luna es 0,01 veces la de la Tierra y su radio es 0,25 veces el radio terrestre. Un cuerpo, cuyo peso en la Tierra es de 800 N, cae desde una altura de 50 m sobre la superficie lunar.
a) Determine la masa del cuerpo y su peso en la Luna.
b) Realice el balance energético en el movimiento de caída y calcule la velocidad con que el cuerpo llega a la superficie. ($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})

19. Dadas las siguientes distribuciones de masa (todas de 10 kg), calcular para cada caso campo y potencial gravitatorios en el punto A, así como el trabajo necesario para llevar la unidad de masa desde el punto A al B.
($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})



20. El 4 de octubre de 1957 se lanzaba desde la base de Baikonur (antigua URSS) el primer satélite artificial, el Sputnik I. Se trataba de una esfera de aluminio de 83,6 kg, que orbitó en torno a la Tierra con un periodo de revolución de 95 minutos. Suponiendo que realizó órbitas circulares.
a) Calcule la altura sobre la superficie terrestre a la que orbitó el satélite.
b) Calcule la aceleración del satélite en la órbita.
(R_T = 6370 km ; g_{oT} = 9,8 N/kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})

21. Un meteorito cae hacia la Tierra. Cuando es observado por primera vez, se encuentra a una distancia de la superficie igual a 100 veces el radio terrestre, y se mueve a 10 km/s respecto a nuestro planeta. Calcule razonadamente la velocidad con la que llega a la superficie y su energía cinética, si su masa es de 1000 toneladas.
(R_T = 6370 km ; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})

22. Conocida la densidad ρ de un planeta, y supuesta ésta constante, demuestre que tanto la gravedad superficial como la velocidad de escape del planeta son proporcionales al radio R del mismo.

Cuestiones aparecidas en la PEvAU:

PEvAU 2024. Junio. A2.
a) i) Deduzca razonadamente la expresión de la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de un planeta. ii) La masa y el radio de la Tierra son 81 y 3,67 veces la masa y el radio de la Luna, respectivamente. ¿Qué relación existe entre las velocidades de escape desde las superficies de la Tierra y la Luna? Razone su respuesta.
b) Se desea poner alrededor de Júpiter un satélite artificial en órbita circular estacionaria (igual periodo que el planeta). Un día en Júpiter es 0,41 veces el día terrestre y la masa de Júpiter es 318 veces la de la Tierra. Determine: i) el radio orbita alrededor de Júpiter; ii) la relación que existe entre los radios orbitales de dos satélites que orbitan estacionariamente alrededor de la Tierra y de Júpiter.
$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg$^-$2 , $M_{Júpiter} = 1,9 \cdot 10^{27}$ kg , $T_{Tierra} = 24$ h

PEvAU 2023. Junio. A2.
A1. a) Un satélite de masa m orbita a una altura h sobre un planeta de masa M y radio R. i) Deduzca la expresión de la velocidad orbital del satélite y exprese el resultado en función de M, R y h. ii) ¿Cómo cambia su velocidad si la masa del planeta se duplica? ¿Y si se duplica la masa del satélite?
A2. a) i) Escriba la expresión del potencial gravitatorio creado por una masa puntual M, indicando las magnitudes que aparecen en la misma. ii) Razone el signo del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando una masa m, inicialmente en reposo en las proximidades de M, se desplaza por acción del campo gravitatorio.
b) Recientemente la NASA envió la nave ORION-Artemis a las proximidades de la Luna. Sabiendo que la masa de la Tierra es 81 veces la de la Luna y la distancia entre sus centros es $3,84 \cdot 10^5$ km: i) calcule en qué punto, entre la Tierra y la Luna, la fuerza ejercida por ambos cuerpos sobre la nave es cero; ii) determine la energía potencial de la nave en ese punto sabiendo que su masa es de 5000 kg.
$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg

PEvAU 2022. Junio. B2.
a) En una determinada región del espacio existen dos puntos A y B en los que el potencial gravitatorio es el mismo. i) ¿Podemos concluir que los campos gravitatorios en A y en B son iguales? ii) ¿Cuál sería el trabajo realizado por el campo gravitatorio al desplazar una masa m desde A hasta B?
b) Dos masas de 2 y 4 kg se sitúan en los puntos A(2,0) m y B(0,3) m, respectivamente. i) Determine el campo y el potencial gravitatorio en el origen de coordenadas. ii) Calcule el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria para trasladar una tercera masa de 1 kg desde el origen de coordenadas hasta el punto C(2,3)m. $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

PEvAU 2021. Junio. A2
a) a) Razone si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Si un planeta tiene el doble de masa y la mitad del radio que otro planeta, su velocidad de escape será el doble".
b) Dos masas m_1 = 10 kg y m_2 = 10 kg se encuentran situadas en los puntos A(0,0) m y B(0,2) m, respectivamente. i) Dibuje el campo gravitatorio debido a las dos masas en el punto C(1,1) m y determine su valor. ii) Calcule el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria cuando una tercera masa m_3 = 1 kg se desplaza desde el punto D(1,0) m hasta el punto C(1,1) m. $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

PEvAU 2021. Julio. A1
a) Razone si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Si un planeta tiene el doble de masa y la mitad del radio que otro planeta, su velocidad de escape será el doble".
b) Conociendo la gravedad y la velocidad de escape en la superficie de Marte, calcule: i) El radio de Marte. ii) La masa de Marte. $g_{Marte} = 3,7$ m s^{-2}; $v_{escape} = 5 \cdot 10^3$ m s^{-1}; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

PEvAU 2020. Julio. 1.b
a) i) ¿Puede ser nulo el campo gravitatorio en alguna región del espacio cercano a dos partículas sabiendo que la masa de una de ellas es el doble que la de la otra? ii) ¿Y el potencial gravitatorio? Razone las respuestas apoyándose en un esquema.
b) Dos masas de 2 kg y 5 kg se encuentran situadas en los puntos (0,3) m y (4,0) m, respectivamente. Calcule:
i) El potencial gravitatorio en el origen de coordenadas. ii) El trabajo necesario para desplazar una masa de 10 kg desde el origen de coordenadas al punto (4,3) m y comente el resultado obtenido. $G = 6,67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

PEvAU 2019. Junio. A1.

a) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y justifique la respuesta: "Si en un punto del espacio la intensidad del campo gravitatorio creado por varias masas es nulo, también lo será el potencial gravitatorio".

b) Dos cuerpos, de 10 kg de masa, se encuentran en dos de los vértices de un triángulo equilátero, de 0,6 m de lado. i) Calcule el campo gravitatorio que estas dos masas generan en el tercer vértice del triángulo. ii) Calcule el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria de las dos masas para traer otro cuerpo de 10 kg desde el infinito hasta el tercer vértice del triángulo. $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

PEvAU 2019. Septiembre. B1.

a) i) Defina velocidad orbital y deduzca su expresión para un satélite en órbita circular en torno a la Tierra. ii) ¿Qué relación existe entre las velocidades de escape de un cuerpo si cambia su altura sobre la superficie terrestre de $2R_T$ a $3R_T$?

b) El satélite Astra 2C, empleado para emitir señales de televisión, es un satélite en órbita circular geoestacionaria. Calcule: i) La altura a la que orbita y su velocidad. ii) La energía invertida para llevar al satélite desde la superficie de la Tierra hasta la altura de su órbita.

$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km, $m_{satélite} = 4500$ kg

PEvAU 2018. Junio. A1.

a) Si la masa y el radio de la Tierra se duplican, razone si las siguientes afirmaciones son correctas: (i) El periodo orbital de la Luna se duplica; (ii) su velocidad orbital permanece constante.

b)La masa de Marte es aproximadamente la décima parte de la masa de la Tierra y su radio la mitad del radio terrestre. Calcule cuál sería la masa y el peso en la superficie de Marte de una persona que en la superficie terrestre tuviera un peso de 700 N. $g_T = 9{,}8$ m s^{-2}

PEvAU 2018. Junio. B1.

a) Un satélite artificial describe una órbita circular en tomo a la Tierra. ¿Cómo cambiaría su velocidad orbital si la masa de la Tierra se duplicase, manteniendo constante su radio? ¿Y su energía mecánica?

b) Se desea situar un satélite de 100 kg de masa en una órbita circular a 100 km de altura alrededor de la Tierra. (i) Determine Ia velocidad inicial mínima necesaria para que alcance dicha altura; (ii) una vez alcanzada dicha altura, calcule la velocidad que habría que proporcionarle para que se mantenga en órbita.

$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km

PEvAU 2017. Junio. A1.

a) Dos partículas, de masas m y 2m, se encuentran situadas en dos puntos del espacio separados una distancia d. ¿Es nulo el campo gravitatorio en algún punto cercano a las dos masas? ¿Y el potencial gravitatorio? Justifique las respuestas.

b) Dos masas de 10 kg se encuentran situadas, respectivamente, en los puntos (0,0) m y (0,4) m. Represente en un esquema el campo gravitatorio que crean en el punto (2,2) m y calcule su valor.

$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

PEvAU 2017. Junio. B1.

a) Un bloque de acero está situado sobre la superficie terrestre. Indique justificadamente cómo se modificaría el valor de su peso si la masa de la Tierra se redujese a la mitad y se duplicase su radio.

b) El planeta Mercurio tiene un radio de 2440 km y la aceleración de la gravedad en su superficie es 3,7 m s^{-2}. Calcule la altura máxima que alcanza un objeto que se lanza verticalmente desde la superficie del planeta con una velocidad de 0,5 m s^{-1}. $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

Cuestiones aparecidas en la Fase Local de la Olimpiada de Física. Granada:

2024:

PROBLEMA 1

Galileo observó por primera vez las lunas de Júpiter en 1610. Encontró que Io, el satélite más cercano a Júpiter poseía un periodo orbital de 1,8 días y el radio de su órbita era, aproximadamente, 3 veces el diámetro de Júpiter. Asimismo, encontró que el periodo orbital de Calisto (la cuarta luna más alejada de Júpiter) era de 16,7 días. Con esos datos, suponiendo órbitas circulares y usando que el radio de Júpiter es $7{,}15\cdot 10^7$ m, calcule:

a) La masa de Júpiter. b) El radio de la órbita de Calisto.

2023:
Calcule a qué profundidad *h* desde la superficie terrestre el valor del campo gravitatorio es igual al que hay a una altura sobre la superficie igual al radio terrestre R_T.
Nota: considere que la Tierra es homogénea (su densidad es por tanto la misma en todos los puntos de su interior). Tenga en cuenta que para un punto el interior de la Tierra, la masa que hay entre dicho punto y la superficie terrestre no afecta gravitatoriamente al punto.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS

1. a) $2{,}87 \cdot 10^{-16}$ años^2/km^3 ; b) $5{,}1 \cdot 10^5$ km
2. a) $\vec{g} = -9{,}55 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 4{,}77 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}$ N/kg ; V = $-2{,}39 \cdot 10^{-10}$ J/kg

   b) $\vec{F}_g = -1{,}91 \cdot 10^{-10}\,\vec{i} - 9{,}55 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}$ N; Ep = $-4{,}78 \cdot 10^{-10}$ J ; c) $2{,}77 \cdot 10^{-10}$ J
3. a) $\vec{g} = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} + 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}$ N/kg ; V = $-3{,}34 \cdot 10^{-10}$ J/kg

   b) $3{,}34 \cdot 10^{-10}$ J
4. a) $3{,}46 \cdot 10^8$ m de la Tierra ; b) No
5. a) 1372 N ; b) 28 m s^{-1}
6. a) 0,41 R_T ; $-3{,}14 \cdot 10^7$ J/kg
7. a) 1596 km ; b) 1276 km . (No es posible despreciar la variación de g con la altura)
8. a) 11,2 km/s ; b) 9,8 km/s
9. a) 3963 m/s ; b) 0,616 m/s^2
10. a) 72 m ; b) 27,8 veces mayor
11. a) 2,4 m/s
12. a) 3,73 m/s^2
13. a = $5{,}95 \cdot 10^{-3}$ m s^{-2} ; $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg
14. a) $W_{ext} = -W_g = 6{,}28 \cdot 10^8$ J ; b) 7926 m/s
15. a) r = 42300 km ; $a_t = 0$ m/s^2 ; W = 0 J ; b) 0,22 m s^{-2}
16. a) a) 5592 m/s ; b) 1250 N
17. a) Cualquier órbita a una distancia del centro de la Tierra r = 42300 km, tendrá un periodo de revolución igual al terrestre. Sólo será geoestacionario si, además, su órbita es ecuatorial. ; b) $v_{esc} = 3{,}6\ v_{orb}$
18. a) m = 80 kg ; P_L= 128 N

21. v = $1{,}498 \cdot 10^4$ m s^{-1} (aprox 15 km/s) ;
    Ec = $1{,}122 \cdot 10^{14}$ J (mayor que le energía liberada en la bomba atómica de Hiroshima, aprox $9 \cdot 10^{13}$ J)

ANEXO I:

Puesta en órbita de un satélite: estudio energético simplificado

Para calcular la energía que es necesario suministrar a un satélite de masa *m* desde su lanzamiento hasta que alcanza su órbita definitiva, aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica.

1: Lanzamiento en la superficie. $E_{M1} = E_{c1} + E_{pg1}$ Energía potencial $E_{pg1} = -\frac{GMm}{R}$

Aunque inicialmente el cohete está aparentemente en reposo, en realidad se mueve junto con la rotación de la Tierra. Esto aporta una energía cinética inicial que favorece la puesta en órbita. La velocidad lineal de rotación ($v = \omega \cdot R'$) depende de la latitud λ, ($R' = R \cdot \cos\lambda$) → $v = \omega \cdot R \cdot \cos\lambda$ → $E_{c1} = \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \cos^2\lambda$

Esta energía cinética es máxima en el ecuador y nula en los polos. Por este motivo las agencias espaciales procuran instalar sus bases de lanzamiento en puntos lo más cerca posible del ecuador.

2: Movimiento final en órbita circular $E_{M2} = -\frac{GMm}{2r}$

Además de la gravedad, actúan dos fuerzas no conservativas:

- El rozamiento con la atmósfera (disipativa, resta energía)
- La fuerza propulsora del cohete (F_{prop})

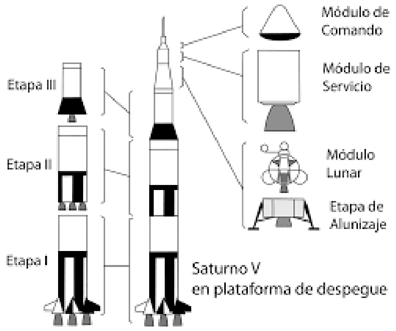
$$E_{M2} - E_{M1} = W_{FNC} \quad \rightarrow \quad \left(-\frac{GMm}{2r}\right) - \left(\frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \cos^2\lambda - \frac{GMm}{R}\right) = W_{Fprop} + W_{FRoz}$$

$$W_{Fprop} = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right) - \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \cos^2\lambda - W_{FRoz}$$

Esto nos da la energía que hay que proporcionar al satélite para ponerlo en órbita. Si despreciamos el rozamiento con el aire, obtenemos una energía necesaria de $3{,}11 \cdot 10^6$ J por cada kg

En la realidad, el cálculo se hace más complicado, por diversos factores:

1. La fuerza de rozamiento con la atmósfera es cualquier cosa menos despreciable. Además, aumenta con la velocidad, como ocurre con cualquier cuerpo que se mueva en un fluido. Por otro lado, al ascender, el aire se hace menos denso, lo que tiende a disminuir el rozamiento. Ambos factores no se compensan, y el cálculo de la energía disipada por rozamiento se vuelve complejo.
2. La masa del satélite (la "carga útil" del cohete) supone menos del 5% de la masa total. El resto (carcasa, motores, combustible) está distribuido en varias etapas (dos o tres, normalmente) que se van desprendiendo conforme agotan su combustible, lo que reduce la masa y hace que la aceleración sea mayor. También el hecho de que el combustible se consuma disminuye la masa que hay que impulsar conforme el cohete asciende.

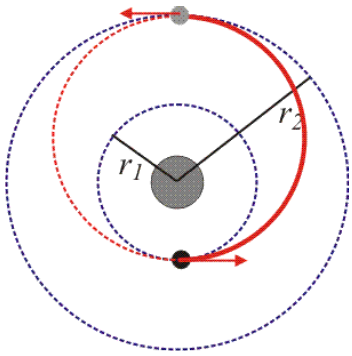


Estos factores hacen que el cálculo real del tipo y la cantidad de combustible necesario sea una tarea laboriosa.

Cambio de órbita de un satélite: órbita de transferencia

Supongamos un satélite que describe órbitas circulares en torno a la Tierra a una distancia r_1, y queremos trasladarlo a una órbita superior, también circular de radio $r_2 > r_1$. Para ello hay que suministrar al satélite la energía cinética necesaria para colocarlo en una *órbita de transferencia*, que es aquella que tiene su perigeo a una distancia r_1, y su apogeo a distancia r_2.

Al tener más energía cinética (más velocidad) de la correspondiente a la órbita r_1, el satélite se alejará siguiendo una elipse, hasta que llega en su apogeo a una distancia r_2. Si no se le proporciona ningún impulso adicional, el satélite volvería a acercarse a la Tierra, ya que llega a r_2 con una velocidad inferior a la necesaria para seguir una órbita circular a esa distancia, y caería otra vez hasta r_1, completando la elipse. Por eso, al llegar al apogeo, los motores del satélite deben proporcionarle nuevamente impulso necesario para alcanzar la velocidad orbital a la distancia r_2.



La energía total que hay que suministrar es igual a la diferencia de energía mecánica entre las dos órbitas.

$$E_{M2} - E_{M1} = -\frac{GMm}{2r_2} + \frac{GMm}{2r_1}$$

ANEXO II:

La materia oscura

Hasta no hace mucho dábamos por sentado que toda la materia del Universo (esto es, todo aquello que tiene masa, que produce gravitación, que deforma el espacio-tiempo) estaba formada por átomos (es decir, por electrones y quarks). Y en el universo los átomos están concentrados principalmente en las estrellas, que desprenden radiación, y en nebulosas de gas y polvo, que son calentadas por estrellas cercanas, y terminan desprendiendo radiación infrarroja. Es decir, podemos detectar la materia que tiene una galaxia por la radiación que emite, e incluso medir qué cantidad de materia contiene y cómo está distribuida.

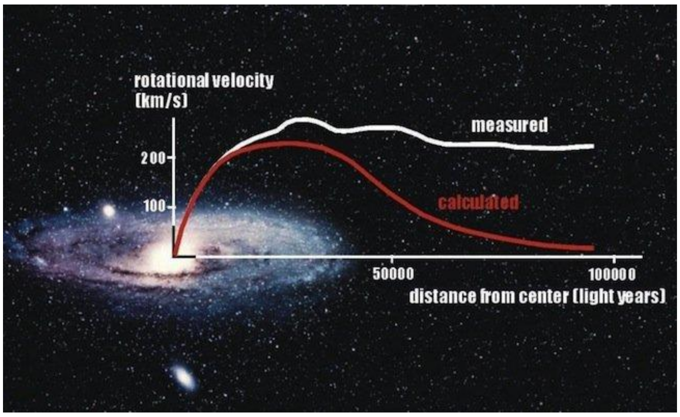
El movimiento de las galaxias espirales

Existen varios tipos de galaxias (elípticas, espirales, irregulares). Las galaxias espirales (nuestra Vía Láctea es una de ellas) constan de una zona central (bulbo) con alta concentración de estrellas, un disco con brazos espirales (como un remolino) con una densidad de estrellas más o menos constante, y una parte exterior, el halo, con una baja concentración de estrellas, y que decrece rápidamente con la distancia.
Desde mediados del s.XX se sabe que las galaxias espirales están en rotación. Las estrellas que la componen describen órbitas en torno al centro de la galaxia. Y las velocidades de rotación de las diferentes partes de una galaxia pueden medirse actualmente con bastante precisión.

Si aplicamos la ley de gravitación de Newton y el teorema de Gauss, vemos que la gravedad que sufre una estrella que orbita en torno al centro galáctico depende de la masa que queda dentro de la órbita y, por tanto, es proporcional al radio ($g = k \cdot r$) para el interior del disco galáctico, donde la concentración de estrellas es grande, pudiéndose considerarse "casi" como si se tratara de un sólido girando,

$$\frac{v^2}{r} = g = k \cdot r \;\; \rightarrow \;\; v^2 = k \cdot r^2$$

La velocidad de rotación es proporcional a la distancia r al centro. Esto se observa en la realidad



Para las estrellas del halo, en las afueras del disco, donde ya hay pocas estrellas y la densidad de masa que observamos es casi cero, la masa dentro de la órbita ya no aumenta con la distancia, sino que se mantiene constante (como pasa con los planetas alrededor del Sol), y las leyes de Newton nos dicen que la velocidad orbital será

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = k \cdot r^{-\frac{1}{2}}$$

La velocidad debería disminuir con la distancia.
Sin embargo, lo que se observa es que en el halo la velocidad de las estrellas se mantiene prácticamente constante, independientemente de la distancia r.

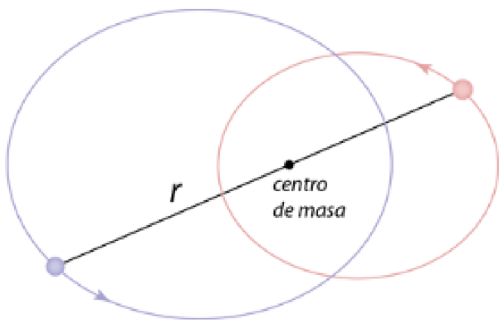
Ante esta discrepancia entre la teoría de gravitación y las observaciones experimentales, surgen dos posibilidades.
1- La teoría de gravitación de Newton (y la relatividad einsteniana, a esa escala dan los mismos resultados) deja de ser correcta a tan grandes distancias, siendo preciso modificarla. En los años 80 del s.XX surgió la hipótesis MOND (Modified Newtonian Dynamics), que actualmente es descartada por la mayor parte de la comunidad científica.
2- Existe más masa en las galaxias aparte de la que podemos ver. Vemos la materia ordinaria (formada por átomos) porque emite luz (estrellas) u otro tipo de radiación al calentarse por la energía que le llega de otras estrellas (caso de las nebulosas y *nubes* de polvo y gas). Sin embargo, esta nueva "materia" no interaccionaría con la radiación, sólo ejercería gravedad. De ahí que se ha bautizado como "materia oscura" a esta cantidad de materia adicional que es necesaria para explicar la rotación de las galaxias. Según los cálculos, la cantidad de materia oscura en el universo quintuplicaría a la materia ordinaria. En una galaxia, el halo de materia oscura se extendería mucho más allá de lo que vemos.

La hipótesis de la materia oscura es la más aceptada actualmente, pero no sabemos nada aún acerca de qué es, de qué clase de partícula la compone.

ANEXO III:

¿Es estable el Sistema Solar? El problema de los tres cuerpos.

La ley de gravitación de Newton explica el movimiento de los cuerpos celestes (estrellas, planetas, satélites) y establecen las ecuaciones que rigen dicho movimiento, teniendo en cuenta las atracciones mutuas entre todos los cuerpos implicados. Es lo que se denomina un sistema *determinista*.



Sin embargo, la resolución de estas ecuaciones (el cálculo de las órbitas que van a seguir los cuerpos partiendo de unas ciertas posiciones y velocidades) puede volverse un asunto complicado. De hecho, sólo en el caso de dos cuerpos que se atraigan mutuamente existe una solución exacta para el problema. Ambos astros describen órbitas elípticas en torno a su centro de masas. Se conoce como *problema de los dos cuerpos*.

Pero si el número de objetos es de 3 o superior (*problema de los tres cuerpos*), ya no existe una solución exacta (lo demostró el matemático francés Poincaré en el s XIX). Sólo podremos calcularlo de forma aproximada. Es más, el sistema se vuelve *caótico*, una leve variación de las posiciones o velocidades iniciales puede producir una enorme variación en las órbitas. Incluso puede volverse inestable, dispersándose los cuerpos por el espacio o colisionando. A muy largo plazo, nuestro sistema solar será inestable.

El sistema de tres cuerpos restringido: puntos de Lagrange.

El matemático francés Lagrange estudió el problema de tres cuerpos en el caso particular de que uno de ellos tuviera una masa mucho menor que la de los otros dos (aproximación válida para un satélite artificial comparado con las masas de la Tierra y la Luna, o para los asteroides comparados con El Sol y Júpiter). Demostró que, para este caso, existían ciertos puntos (llamados *puntos de Lagrange*) donde el tercer cuerpo describiría una órbita estable, puntos donde parecería estar "en equilibrio", manteniendo las distancias con las otras dos masas. No se trata de que se mantuviera en reposo, sino que describiría una órbita en torno al centro de masas igual a la que describen los otros cuerpos. En la figura puede verse la ubicación de los 5 puntos de Lagrange. Para el sistema Tierra-Sol, estos puntos son de gran utilidad para colocar en ellos satélites artificiales para estudiar el Sol. En el caso del sistema Sol-Júpiter, las posiciones L4 y L5 están ocupadas por los asteroides troyanos.