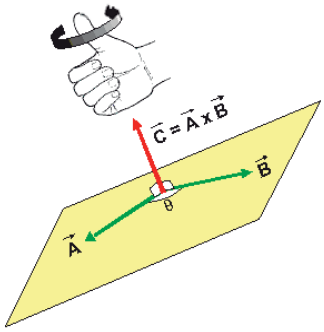
Tema 0
Cálculo vectorial



IES Padre Manjón
Prof: Eduardo Eisman

Tema 0. Cálculo vectorial

- Magnitudes físicas escalares y vectoriales. Vectores
- Vector unitario o versor
- Descomposición de un vector en el plano
- Descomposición de un vector en el espacio
- Suma y diferencia de vectores
- Producto y cociente de un vector por un escalar
- Producto escalar de dos vectores
- Producto vectorial de dos vectores
- Momento de un vector respecto de un punto
- Derivadas de un vector respecto de un escalar
- Derivada de un vector: sumas y productos
- Operaciones diferenciales: gradiente, divergencia y rotacional
- Ejercicos de cálculo vectorial

IES Padre Manjón
Prof: Eduardo Eisman

1. Magnitudes físicas escalares y vectoriales. Vectores

- Las magnitudes físicas pueden ser **escalares o vectoriales:**

- **Magnitudes escalares** cuando quedan definida con un número, resultado de la medida, y la unidad correspondiente.

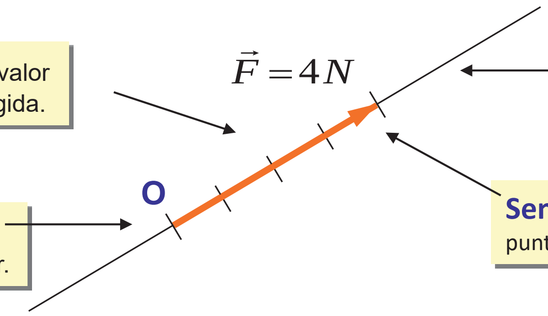
- Son magnitudes escalares: masa (5 kg), temperatura (34ºC), tiempo (3s), densidad, intensidad de corriente, resistencia eléctrica, etc.

- **Magnitudes vectoriales** cuando además de su valor numérico y su unidad necesitan, para quedar determinadas, una dirección y un sentido

- Las magnitudes vectoriales se representan mediante **vectores**, que son segmentos orientados que quedan definidos por:

Módulo o intensidad: valor de la magnitud en la unidad elegida.

Dirección: corresponde a la recta (directriz) sobre la que se dibuja el vector.



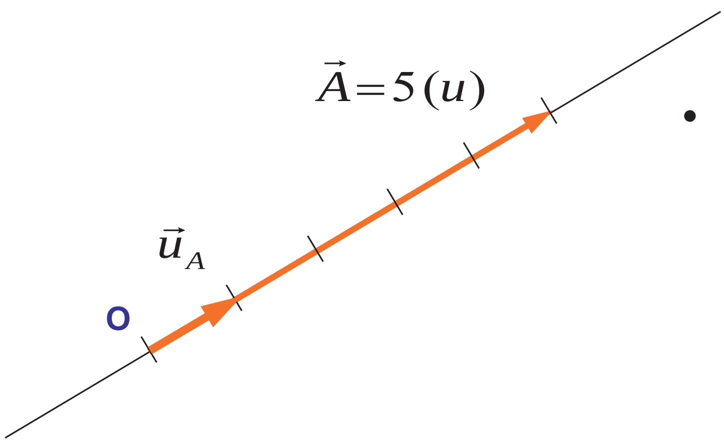
Punto de aplicación: a partir del cual se dibuja el vector.

Sentido: el de la punta de flecha

- Los vectores se nombran mediante letras con una flecha encima.

2. Vector unitario o versor

- **Si un vector $\vec{A}$ lo dividimos en tantas partes como indica su módulo A se obtiene otro vector $\vec{u}_A$ que tiene su misma dirección y sentido pero de módulo la unidad.**
- **Al vector $\vec{u}_A$ se le llama VECTOR UNITARIO O VERSOR del vector $\vec{A}$**



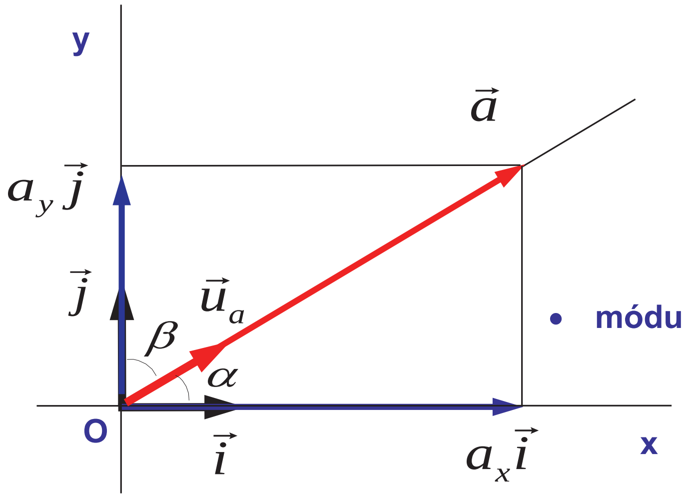
- Todo vector tiene su correspondiente vector unitario o versor:

$$\frac{\vec{A}}{A}=\vec{u}_A$$

- **Cualquier vector se puede expresar de la forma:** $\vec{A}=A.\vec{u}_A$

3.1 Descomposición de un vector en el plano

- **Todo vector puede descomponerse en sus dos componentes cartesianas, perpendiculares entre sí, que llevan las direcciones de los ejes x , y**



$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

- **siendo $\vec{i}, \vec{j}$ vectores unitarios en las direcciones de los ejes x,y**

- **módulo del vector $\vec{a}$:** $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

- **cosenos directores del vector $\vec{a}$:** $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{a}$ $\quad \cos\beta = \dfrac{a_y}{a}$

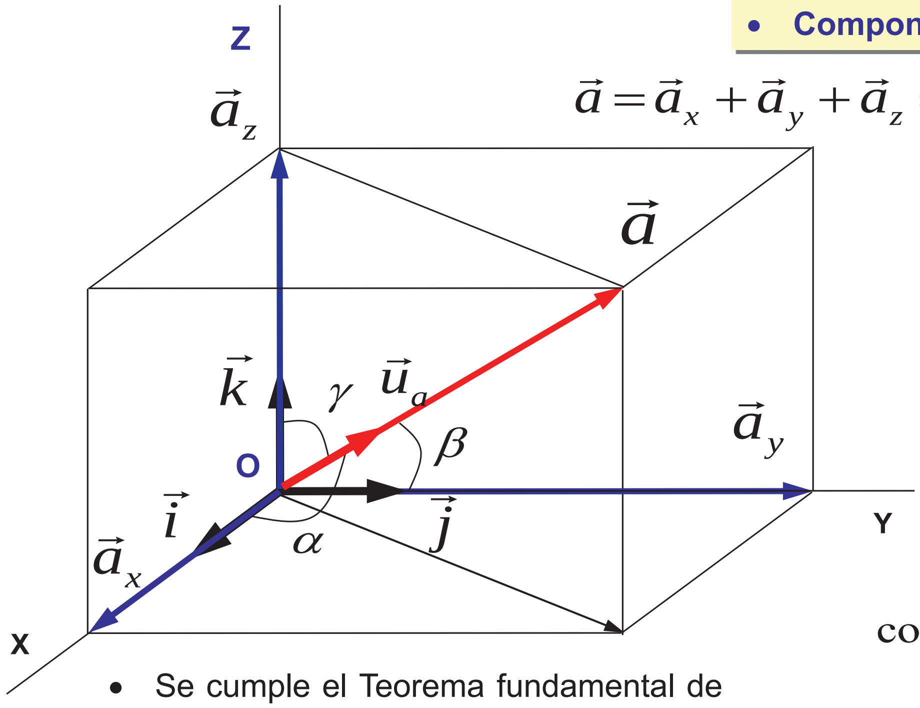
- **Un vector queda determinado mediante:**

- **Sus dos componentes**

- **Su módulo y al menos un coseno director**

3.2 Descomposición de un vector en el espacio

- **Todo vector puede descomponerse en sus tres componentes cartesianas, perpendiculares entre sí, que llevan las direcciones de los ejes x , y, z**



- **Componentes del vector:**

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

- **módulo del vector:**

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- **cosenos directores:**

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}$$

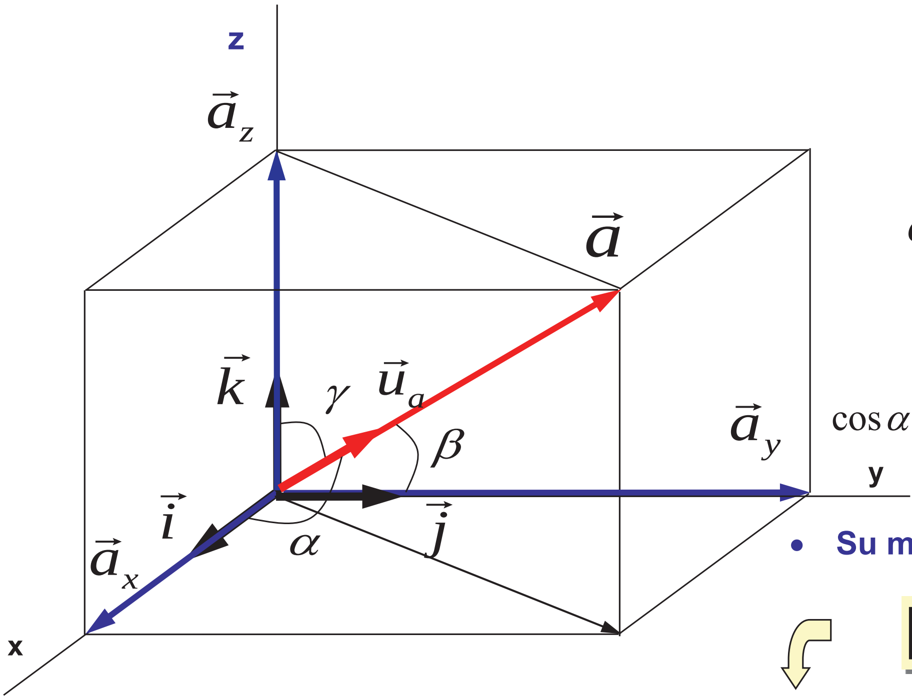
$$\cos\beta = \frac{a_y}{a} \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

- Se cumple el Teorema fundamental de la trigonometría:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

3.3 Descomposición de un vector en el espacio

- Un vector queda determinado mediante:



- Sus tres componentes:

$$\left[a_x\, ,\, a_y\, ,\, a_z\right]$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{a} \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

- Su módulo y dos de sus ángulos:

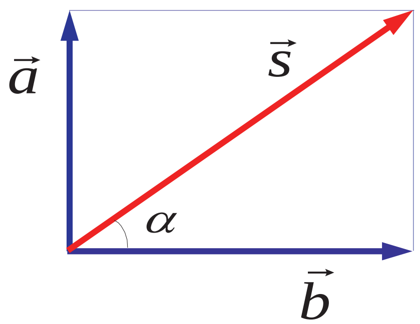
$$\left[a\, ,\, \cos\alpha\, ,\, \cos\beta\right]$$

$$a_x = a\cos\alpha \qquad a_y = a\cos\beta \qquad a_z = a\cos\gamma$$

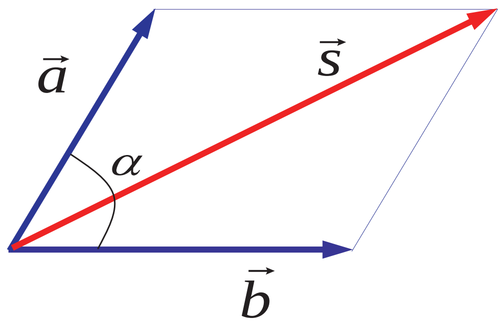
4.1 Suma y diferencia de vectores

- La suma de dos vectores concurrentes es otro vector que se obtiene, gráficamente, trazando la diagonal del paralelogramo formado a partir de los vectores sumando:

- Vectores perpendiculares:



- Vectores no perpendiculares:



- módulo: $s = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$s = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$

- dirección: $\alpha = arc\,tg\,\dfrac{a}{b}$

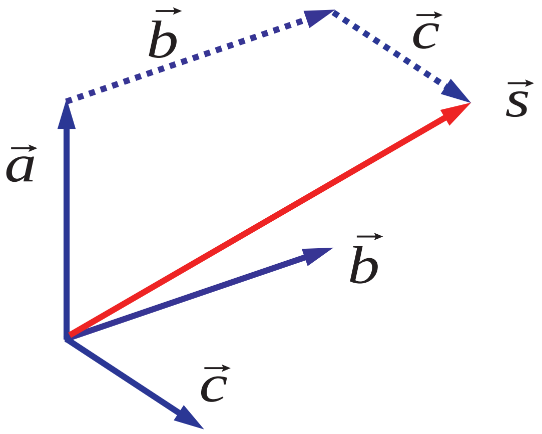
- En este caso, es más útil, descomponer los vectores en sus componentes perpendiculares y realizar la sumas parciales según los ejes x , y

- El vector suma es la suma vectorial de ambos vectores

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

4.2 Suma y diferencia de vectores

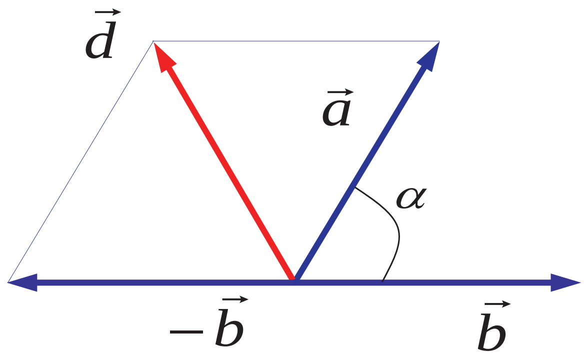
- Para sumar varios vectores concurrentes se hace uso de la regla del polígono:



$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

- Diferencia de vectores:

- Para restar dos vectores, se suma al minuendo el vector opuesto del sustraendo:



$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

- La suma de vectores cumple las propiedades:
  - Conmutativa

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

  - Asociativa

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

4.3 Suma y diferencia de vectores en función de sus componentes

- La expresión de un vector en función de sus componentes cartesianas nos permite realizar sumas y restas con gran facilidad:

- Sean los vectores: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

- El vector suma:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) + \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{s} = \left(a_x + b_x\right)\vec{i} + \left(a_y + b_y\right)\vec{j} + \left(a_z + b_z\right)\vec{k}$$

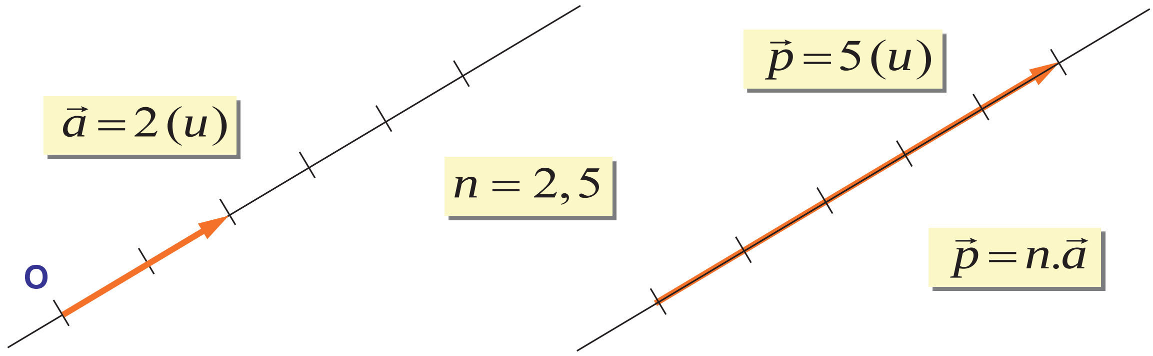
- El vector diferencia:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) + \left(-b_x\vec{i} - b_y\vec{j} - b_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{d} = \left(a_x - b_x\right)\vec{i} + \left(a_y - b_y\right)\vec{j} + \left(a_z - b_z\right)\vec{k}$$

5.1 Producto y cociente de un vector por un escalar (número real)

- Dado el vector $\vec{a}$ y el escalar n (número real), se define su producto como otro vector que tiene la misma dirección, sentido igual u opuesto (según sea el escalar positivo o negativo) y cuyo módulo se obtiene multiplicando el módulo del vector por el escalar



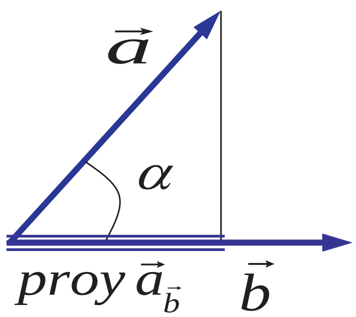
- Para dividir un vector $\vec{a}$ por el escalar n (número real), se multiplica dicho vector por el inverso de n

$$\vec{c}=\frac{\vec{a}}{n}=\frac{1}{n}\vec{a}$$

5.2 Producto escalar de dos vectores

- Dado los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se define producto escalar como el número que resulta de multiplicar el módulo de cada uno de ellos por el coseno del ángulo que forman:

- Producto Escalar $\quad \vec{a}.\vec{b}=a.b.\cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{a.b}$



- Si los vectores son perpendiculares: $\cos 90=0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$
- Si los vectores son paralelos: $\cos 0=1 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=a.b\,(máx)$
- Propiedad Conmutativa: $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$
- Propiedad Distributiva: $\vec{c}.\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{c}.\vec{a}+\vec{c}.\vec{b}$

- Producto escalar en función de sus componentes:

$$\vec{a}.\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right).\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

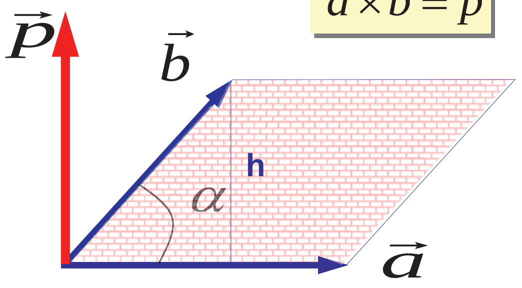
- Puesto que: $\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=1 \qquad \vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0$

5.3 Producto vectorial de dos vectores

- **El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es otro vector que tiene por:**

- **Producto Vectorial:**

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{p}$$



- **Módulo:** $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = a\,b\,sen\,\alpha$
- **Dirección:** Perpendicular al plano formado por ambos vectores.
- **Sentido:** "Regla del sacacorchos" girando el primer vector sobre el segundo por el camino más corto.

- **Interpretación geométrica**

- El módulo del producto vectorial es el ÁREA del paralelogramo construido sobre los vectores:

$$\left|\vec{p}\right| = a\,b\;sen\,\alpha = a\,h = AREA$$

- Si los vectores son perpendiculares: $sen\,90 = 1 \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = ab_{\,(máx)}$
- Si los vectores son paralelos: $sen\,0 = 0 \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$
- No cumple propiedad conmutativa: $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a}$
- Propiedad distributiva: $\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$

5.4 Producto vectorial en función de sus componentes

- **Producto vectorial de dos vectores en función de sus componentes:**

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$
$$=a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}-a_yb_x\vec{k}+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}$$

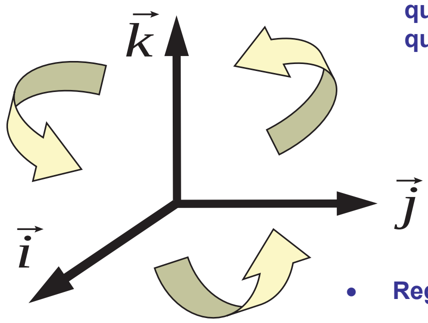
- Hemos tenido en cuenta que:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\;\;\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i};\;\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k};\;\;\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i};\;\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

- Es un vector que tenemos que ordenar



- Regla práctica

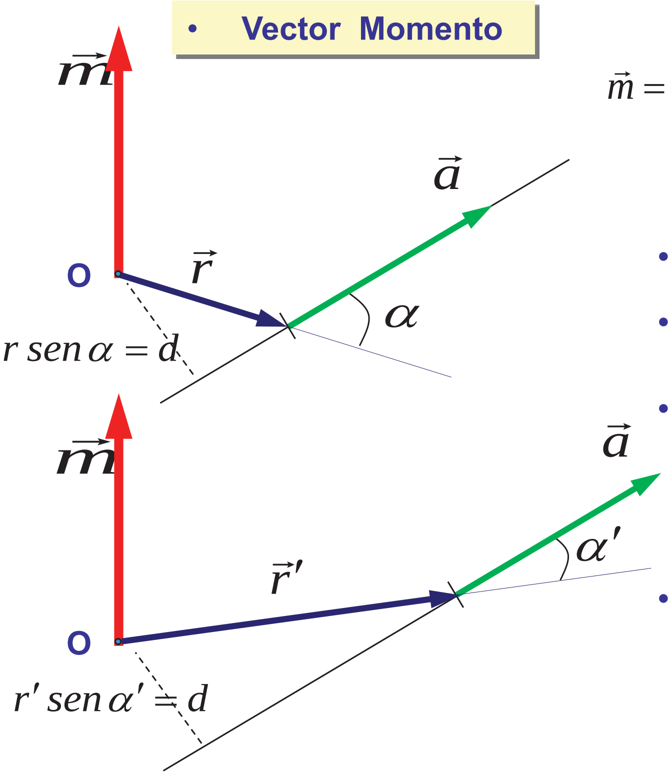
- Resolvemos el determinante formado por:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}=$$
$$=\left[a_yb_z-a_zb_y\right]\vec{i}-\left[a_xb_z-a_zb_x\right]\vec{j}+\left[a_xb_y-a_yb_x\right]\vec{k}$$

6.1 Momento de un vector respecto de un punto

- El momento de un vector $\vec{a}$ con respecto a un punto O, se define como el producto vectorial del vector $\vec{r}$ por el vector $\vec{a}$.

- Vector Momento



$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} = m_x\vec{i} + m_y\vec{j} + m_z\vec{k}$$

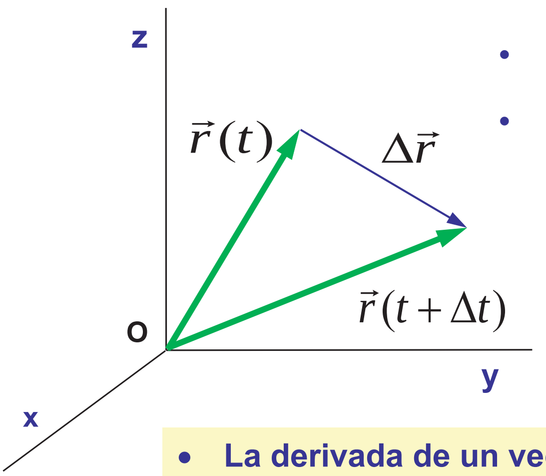
- **Módulo:** $|\vec{m}| = ra\,sen\,\alpha = ad$
- **Dirección:** Perpendicular al plano formado por ambos vectores.
- **Sentido:** “Regla del sacacorchos” girando el primer vector sobre el segundo por el camino más corto.

- El momento $\vec{m}$ no cambia cuando el vector $\vec{a}$ se desplaza a lo largo de su directriz, puesto que:

$$|\vec{m}| = ra\,sen\,\alpha = r'a\,sen\,\alpha' = ad$$

7.1 Derivada de un vector respecto de un escalar

- Sea un vector $\vec{r}$ que depende de un escalar t (tiempo): $\vec{r} = \vec{r}(t)$.
- El vector $\vec{r}$ puede variar, en módulo, dirección o en ambos, con el tiempo.



- En la figura se cumple: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$
- Dividiendo, la expresión anterior por Δt y hallando el límite cuando el tiempo es muy pequeño (tiende a cero):

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Vector Derivada

- La derivada de un vector respecto de un escalar es otro vector:

- Dirección: la tangente a la curva que describe el extremo del vector
- Sentido: el que corresponde a la variación del vector
- Componentes: las derivadas de sus componentes respecto del escalar t:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\vec{i} + \frac{dr_y}{dt}\vec{j} + \frac{dr_z}{dt}\vec{k}$$

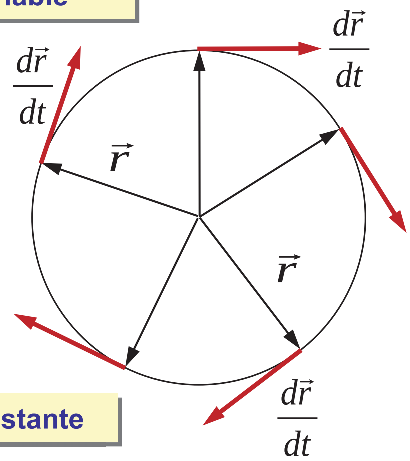
7.2 Consecuencias de la derivada de un vector

- **Casos particulares:**

- **El vector $\vec{r}$ tiene módulo constante y dirección variable**

- El extremo del vector describe una circunferencia, por tanto:

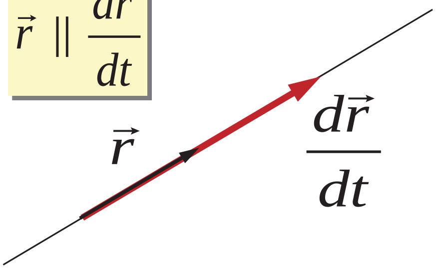
$$\vec{r} \perp \frac{d\vec{r}}{dt}$$



- **El vector $\vec{r}$ tiene módulo variable y dirección constante**

- El extremo del vector describe una línea recta, por tanto:

$$\vec{r} \parallel \frac{d\vec{r}}{dt}$$



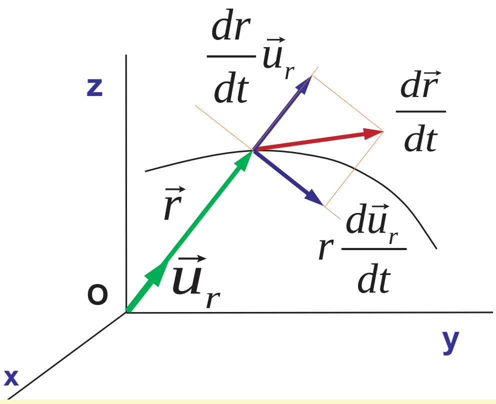
7.3 Consecuencias de la derivada de un vector

- **Caso general:**

- **La expresión de un vector es de la forma :** $\vec{r} = r\,\vec{u}_r$

- **Al escribir su derivada, respecto de t, se observa que se obtienen dos términos (vectores):**

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$



- El primer término es un vector en la dirección del vector r: $\frac{dr}{dt}\vec{u}_r$

- El segundo término es un vector en la dirección perpendicular al vector r: $r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$

- **El vector derivada, que es tangente a la curva que describe el extremo de r, se puede descomponer en dos vectores: uno en la dirección de r y otro perpendicular a r.**

- Todos los $\vec{u}_r$ son iguales en módulo, si varían, describen circunferencias : $\Rightarrow$ $\frac{d\vec{u}_r}{dt} \perp \vec{u}_r$

7.4 Derivada de un vector: sumas y productos

- **Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dependen del mismo escalar t, podemos calcular:**

- **Derivada de un vector:**

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\frac{d\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)}{dt}=\frac{da_x}{dt}\vec{i}+a_x\frac{d\vec{i}}{dt}+...=\frac{da_x}{dt}\vec{i}+\frac{da_y}{dt}\vec{j}+\frac{da_z}{dt}\vec{k}$$

- Como $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ son constantes en módulo y dirección: $\frac{d\vec{i}}{dt}=\frac{d\vec{j}}{dt}=\frac{d\vec{k}}{dt}=0$

- **Derivada de su suma:** $$\frac{d\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}{dt}=\frac{d\vec{a}}{dt}+\frac{d\vec{b}}{dt}$$

- **Derivada de su producto escalar:** $$\frac{d\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{dt}=\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}$$

- **Derivada de su producto vectorial:** $$\frac{d\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}{dt}=\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$$

7.5 Derivación de sumas y productos

- **Dados los vectores que se expresan a continuación:**

$$\vec{a}=t^2\vec{i}-t\vec{j}+\left(2t+1\right)\vec{k} \qquad \vec{b}=\left(2t-3\right)\vec{i}+\vec{j}-t\vec{k}$$

- **Calcular para t = 1:**

- **A)** $$\frac{d\vec{a}}{dt}=\frac{da_x}{dt}\vec{i}+\frac{da_y}{dt}\vec{j}+\frac{da_z}{dt}\vec{k}=2t\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\,\Big|_{t=1}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$$

- **B)** $$\frac{d\vec{b}}{dt}=\frac{db_x}{dt}\vec{i}+\frac{db_y}{dt}\vec{j}+\frac{db_z}{dt}\vec{k}=2\vec{i}-\vec{k}$$

- **C)** $$\frac{d\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{dt}=\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}=\left(2t\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)\cdot\left[\left(2t-3\right)\vec{i}+\vec{j}-t\vec{k}\right]+$$
$$\left[t^2\vec{i}-t\vec{j}+\left(2t+1\right)\vec{k}\right]\cdot\left(2\vec{i}-\vec{k}\right)\Big|_{t=1}=-6$$

- **D)** $$\frac{d\left(\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}\right)}{dt}=\frac{d\vec{a}}{dt}\times\frac{d\vec{b}}{dt}+\vec{a}\times\frac{d^2\vec{b}}{dt^2}=\left(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)\times\left(2\vec{i}-\vec{k}\right)=\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$$

8.1 Operaciones diferenciales

- **GRADIENTE**

- **Vector gradiente** u operador diferencial nabla, es un operador vectorial que se define mediante la expresión:

$$\vec{grad} = \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right)$$

- **El gradiente es un vector** que aplicado a una función escalar la transforma en una función vectorial:

- **Función escalar** → **Vector Gradiente** → - **Función vectorial**

- Sea la función escalar F (x, y, z) , el gradiente de esta función es el vector:

$$\vec{grad}\, F = \vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} \right)$$

- **Ejercicio**: Hallar el gradiente de la función escalar $F = 2xy^2 - 3yz^2$, en el punto (2, 1, -1) .

$$\vec{\nabla} F = 2y^2\,\vec{i} + \left(4xy - 3z^2\right)\vec{j} - 6yz\,\vec{k} \;=\; 2\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$$

Vector gradiente en el punto (2, 1, -1)

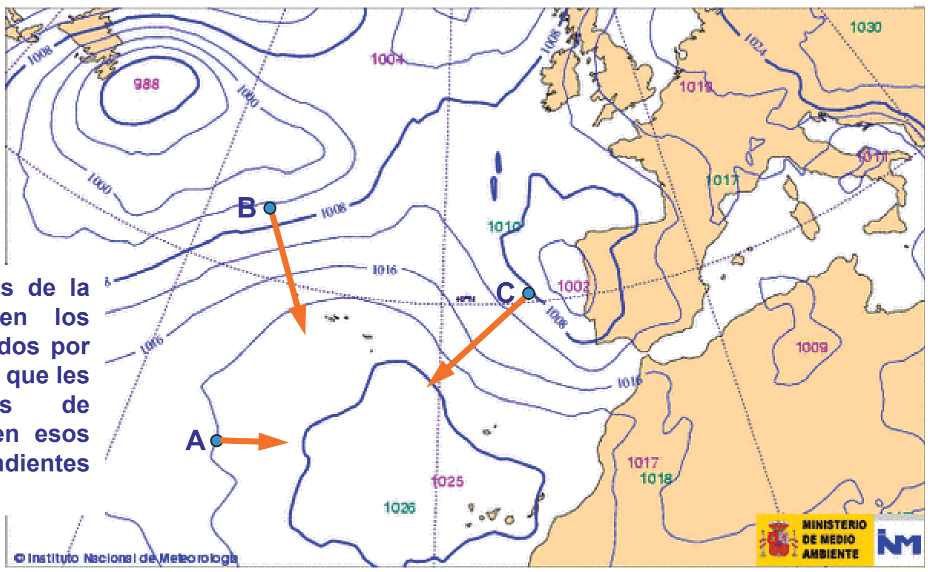
- El vector gradiente indica la dirección en que es máxima la variación por unidad de longitud de la función F.

8.2 Operaciones diferenciales

- **… GRADIENTE**

- Si calculamos el gradiente en un punto de un mapa de isobaras (líneas de igual presión), obtenemos un vector que nos indica la dirección en que es máxima la variación de la presión:
- **Su módulo será tanto mayor cuanto más juntas estén las isobaras.**
- **Su dirección es la de la máxima pendiente.**
- **Orientado en el sentido creciente de las isobaras y perpendicular a las mismas.**

- **En el mapa de isobaras de la figura, nos fijamos en los puntos A , B y C definidos por sus coordenadas y a los que les corresponden valores de presión, y dibujamos en esos puntos los correspondientes vectores gradiente.**



8.3 Operaciones diferenciales

- **DIVERGENCIA**

- **Divergencia** se define como el producto escalar del operador nabla por una función vectorial:

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}\right) = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

- **El operador divergencia** transforma una función vectorial en una función escalar:

- **FUNCIÓN VECTORIAL** → **Divergencia** → **FUNCIÓN ESCALAR**

- **Ejercicio:** Hallar la divergencia, en el punto (2, -2, 1) , de la expresión vectorial: $\vec{V} = 2xyz\,\vec{i} - x^2z^2\,\vec{j} + 2y^3z\,\vec{k}$

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(2xyz\,\vec{i} - x^2z^2\vec{j} + 2y^3z\,\vec{k}\right) =$$

$$= 2yz + 2y^3 = -4 - 16 = -20$$

- Si la función vectorial representa un flujo de materia, la divergencia indica cómo varía ese flujo de materia (diferencia entre la que entra y sale) en las tres direcciones correspondientes a los ejes de coordenadas cartesianas, es decir, por unidad de volumen.

8.4 Operaciones diferenciales

- **ROTACIONAL**

- **Rotacional** se define como el producto vectorial del operador nabla por una función vectorial:

$$rot\,\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

- El rotacional de un campo vectorial indica la tendencia a rotar del campo. Es decir, es un campo igual al aumento lateral del campo original por unidad de longitud. Se orienta según la regla de la mano derecha.

- **Ejercicio:** Hallar el rotacional de la función vectorial $\vec{V} = 2xz^3\,\vec{i} - xy^2z\,\vec{j} + 2y^2z^2\,\vec{k}$ en el punto (2, 1, -1) .

$$rot\,\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^3 & -xy^2z & 2y^2z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -xy^2z & 2y^2z^2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^3 & 2y^2z^2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2xz^3 & -xy^2z \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \left(4z^2y + xy^2\right)\vec{i} + 6xz^2\,\vec{j} - y^2z\,\vec{k} = \boxed{6\,\vec{i} + 12\,\vec{j} + \vec{k}}$$

- **Valor del rotacional, en el punto (2,1,-1)**

9.1 Cálculo vectorial. Ejercicios

1. Dado el vector $\vec{A} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ calcular: a) su módulo, b) los ángulos que forma con los ejes de coordenadas y c) su vector unitario o versor.

2. Dados los vectores $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ y $\vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$ calcular: a) sus longitudes, b) los cosenos directores del vector B, c) los vectores suma y diferencia, d) su producto escalar, e) el ángulo formado por ambos y f) su producto vectorial.

3. Hallar el momento del vector $\vec{A} = -7\vec{i} + 11\vec{j} + \vec{k}$ cuyo punto de aplicación es O`(3,5,2) respecto del origen de coordenadas.

4. Dados los vectores Hallar el momento del vector $\vec{A}(1,2,0)$ y $\vec{B}(2,1,1)$, calcular el ángulo que forman y un vector perpendicular a ambos de longitud 2.

5. Dados los vectores $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ y $\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j}$, calcular su producto vectorial y comprobar que este es perpendicular a los vectores dados.

6. Los vectores $\vec{A}(6,0,0)$ y $\vec{B}(4,2,0)$, son los lados de un paralelogramo. Calcular su área.

7. Un vector $\vec{m}$ tiene su origen respecto de un cierto sistema de referencia el punto m_1 (-1,0,2) y de extremo el punto m_2 (2,-3,0), calcular: a) las componentes del vector, b) su módulo y sus cosenos directores, c) el vector unitario de $\vec{m}$. Sea otro vector $\vec{n}$ de módulo 5 y cosenos directores proporcionales a (3,4,0), calcular, d) el ángulo que forman los vectores $\vec{m}$ y $\vec{n}$, e) el área del paralelogramo que forman dichos vectores y f) $\vec{m} + \vec{n}$, $|m+n|$, $|\vec{m}|$, $|\vec{n}|$ y $2\vec{m}$

8. Dada una fuerza $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\ (N)$ aplicada en el punto $\vec{r} = 3\vec{i} - 7\vec{j}\ (m)$, calcular: a) el momento de la fuerza respecto del origen y b) el momento de la fuerza respecto del punto (1,1,-2).

9. ¿Qué diferencia existe entre las potencias escalares y vectoriales de un vector?.

10. Si un vector tiene módulo constante, su derivada puede no ser nula. Explícalo y cita un ejemplo.

9.1 Cálculo vectorial. Ejercicios

11. Dados los vectores $\vec{A} = t^2\vec{i} - t\vec{j} + (2t+1)\vec{k}$ y $\vec{B} = (2t-2)\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, calcular para t = 1

las siguientes expresiones: $d\vec{A}/dt,\ d\vec{B}/dt,\ d/dt(\vec{A}\cdot\vec{B}),\ d/dt(\vec{A}\times d\vec{B}/dt)$

12. Hallar la expresión analítica del vector velocidad y del vector aceleración y calcular los módulos de ambos vectores cuando una partícula se mueve a lo largo de la curva de ecuaciones: x = 3 cos2t, y = 3 sen2t y z = 5t.

13. Indica de la siguiente lista que magnitudes son escalares y cuáles vectoriales: masa, peso, calor específico, trabajo, longitud, potencia, energía, presión, velocidad, intensidad de campo eléctrico, intensidad de corriente eléctrica, intensidad de luz, tiempo, temperatura, densidad, aceleración y cantidad de materia.

14. Un objeto se mueve en un cierto instante con una velocidad de 120 km/h formando un ángulo de 30º con la horizontal. Expresa el vector velocidad en función de sus componentes vertical y horizontal.

15. Un barquero está remando sobre su barca queriendo mantenerse siempre perpendicular a la orilla del rio y cruzarlo con una velocidad media de 36 km/h. ¿Con qué velocidad ha de impulsar la barca y en qué dirección si el agua del río fluye con una velocidad de 9 km/h?.